ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3
Характеристики сверточных кодов в каналах без памяти

Алгоритм декодирования по максимуму правдоподобия обеспечивает минимальную вероятность принятия решения в пользу информационной *последовательности*, отличающейся от переданной. Эффективная реализация алгоритма максимального правдоподобия применительно к сверточным (или в более общем случае к решетчатым кодам) известна как алгоритм Витерби. Этот алгоритм представляет собой процедуру пошаговой оптимизации, которая состоит в поиске оптимального пути в кодовой решетке. Под оптимальным понимается путь в решетке, который имеет *наибольшее* значение *метрики* декодирования. Метрика это величина, которая указывает меру близости между полученной из канала последовательностью и кодовой последовательностью (путем в кодовой решетке). Метрика, монотонно связанная с функцией правдоподобия, является оптимальной.

В настоящей лабораторной работе исследуются характеристики помехоустойчивости *двоичных* сверточных кодов при использовании их в различных каналах *без памяти*. В этом случае оптимальная метрика может быть выражена как сумма метрик ребер, образующих путь.

3.1. Вероятность ошибки декодирования.

Нахождение вероятности ошибки представляет собой одну из основных задач анализа системы передачи информации. Определим *ошибочное событие* как событие, состоящее в том, что при передаче последовательности $\mathbf{c}$ решение принимается в пользу последовательности $\mathbf{c}' \neq \mathbf{c}$, которая соответствует пути в решетке, ответвляющемуся от правильного пути один раз, вновь сливающимся с ним и более не отличающемуся от правильного. С использованием вероятности ошибочного события далее будет оцениваться *вероятность ошибки на бит.*

Вероятность ошибочного события, определяется как

$$P_e = \sum_{\mathbf{c}} P_e(\mathbf{c}) P(\mathbf{c}), \tag{3.1}$$

где $P_e(\mathbf{c})$ - вероятность ошибочного события при условии, что была передана кодовая последовательность $\mathbf{c}$, $P(\mathbf{c})$ - вероятность передачи кодовой последовательности $\mathbf{c}$.

Решение в пользу ошибочной последовательности возникает, когда метрика кодовой последовательности, отличной от переданной, имеет значение, превышающее значение метрики правильного пути. Следовательно

$$P_e(\mathbf{c}) = \Pr\left[\bigcup_{\mathbf{c}' \neq \mathbf{c}} \{M(\mathbf{y}, \mathbf{c}) < M(\mathbf{y}, \mathbf{c}')\}\right], \tag{3.2}$$

где $\mathbf{y}$ - полученная из канала последовательность, $M(\mathbf{y}, \mathbf{c})$ - метрика, по которой выполняется декодирование. Заметим, что значения метрик являются случайными величинами. В канале без памяти их значения равны сумме метрик ребер, образующих путь $\mathbf{c}$.

Точное вычисление вероятности ошибки очень часто оказывается затруднительным и даже невозможным. Поэтому основной подход к определению вероятности ошибки состоит в вычислении *оценок*, которые могут быть получены сравнительно просто. Очевидно, что для практических приложений наибольшее значение имеет верхняя оценка вероятности ошибки. Применительно к анализу алгоритма Витерби верхняя оценка вероятности ошибки быть получена путем последовательного применения а) *аддитивного неравенства* и б) *границы Чернова*.

3.2. Аддитивное неравенство и граница Чернова.

Аддитивное неравенство или граница объединения, имеет вид $\Pr[\bigcup_i A_i] \le \sum_i \Pr[A_i]$, где A_i - некоторые события.

Используя это неравенство, получаем из (3.1) и (3.2), что

$$P_e \le \sum_{\mathbf{c}} \sum_{\mathbf{c}' \ne \mathbf{c}} \Pr[M(\mathbf{y},\mathbf{c}) < M(\mathbf{y},\mathbf{c}')] P(\mathbf{c}) . \quad (3.3)$$

Точное вычисление вероятности $\Pr[M(\mathbf{y},\mathbf{c}) < M(\mathbf{y},\mathbf{c}')]$ также оказывается затруднительным, поэтому эта величина оценивается с использованием сверху с использованием границы Чернова.

Во многих случаях вероятность ошибки декодирования может быть выражена через вероятность того, что сумма некоторых случайных величин значительно превысит свое среднее значение. Такие события называются *большими уклонениями*. На основе границы, дающей хорошее приближение к вероятности большого уклонения суммы случайных величин, может быть построена вероятность ошибки декодирования. Хорошо развит метод их получения, основанный на *границе Чернова*, обобщающей неравенство Чебышева. Рассмотрим общий вид границы Чернова.

Границей Чернова для вероятности превышения суммой некоторых *независимых одинаково распределенных* случайных величин z_i, $i = 1,2,...,N$, нулевого значения называется неравенство

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{N} z_i > 0\right] \le \min_{\lambda>0} g(\lambda)^N , \quad (3.4)$$

где $g(\lambda) = \mathbf{M}[\exp(\lambda z_i)]$ - производящая функция моментов случайной величины z_i, $\mathbf{M}[\cdot]$ - символ математического ожидания, λ - параметр, по которому выполняется оптимизация границы. Заметим, что неравенство (3.4) справедливо для любого значения $\lambda > 0$, для которого существует функция $g(\lambda)$. Более точная граница может быть получена на основе так называемой *модифицированной* границы Чернова, которая имеет вид

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{N} z_i > 0\right] \le \min_{\lambda>0} B(\lambda, N) g(\lambda)^N , \quad (3.5)$$

которая отличается от (3.4) коэффициентом $B(\lambda, N)$, значение которого убывает с ростом N. Конкретный вид этого коэффициента зависит от распределения величин z_i. Заметим, что $B(\lambda, N) < 1$; использование этой границы в выражении (3.5) превращает модифицированную границу Чернова в обычную. Вывод неравенств (3.4) и (3.5) приводится в приложении.

Вернемся к рассмотрению вероятности ошибки декодирования. Применение модифицированной границы Чернова для оценки вероятности $\Pr[M(\mathbf{y},\mathbf{c}) < M(\mathbf{y},\mathbf{c}')]$ приводит к неравенству

$$\Pr[M(\mathbf{y},\mathbf{c}) < M(\mathbf{y},\mathbf{c}')] = \Pr[M(\mathbf{y},\mathbf{c}') - M(\mathbf{y},\mathbf{c}) > 0] \le \min_{\lambda>0} B(\lambda, d_H(\mathbf{c},\mathbf{c}')) g(\lambda)^{d_H(\mathbf{c},\mathbf{c}')}, \quad (3.6)$$

где $d_H(\mathbf{c},\mathbf{c}')$ - расстояние Хэмминга между кодовыми последовательностями $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}'$. Подчеркнем, что конкретные выражения для $g(\cdot)$ и $B(\cdot,\cdot)$ зависят от характеристик канала и будут рассмотрены ниже. Пока продолжим рассмотрение в общем виде. Из (3.3) и (3.6) следует, что

$$P_e \le \min_{\lambda>0} \sum_{\mathbf{c}} \sum_{\mathbf{c}'\ne\mathbf{c}} B(\lambda, d_H(\mathbf{c},\mathbf{c}')) g(\lambda)^{d_H(\mathbf{c},\mathbf{c}')} P(\mathbf{c}).$$

Очевидно, что $d_H(\mathbf{c},\mathbf{c}') = w_H(\mathbf{c}\oplus\mathbf{c}')$, где $w_H(\cdot)$ - вес Хэмминга, $\oplus$ - знак сложения по $\mathrm{mod}\,2$. В силу линейности сверточного кода последовательность $\mathbf{c}'' = \mathbf{c}\oplus\mathbf{c}'$ также принадлежит коду, поэтому

$$P_e \le \min_{\lambda>0} \sum_{\mathbf{c}} \sum_{\mathbf{c}''\ne\mathbf{0}} B(\lambda, w_H(\mathbf{c}'')) g(\lambda)^{w_H(\mathbf{c}'')} P(\mathbf{c}) = \min_{\lambda>0} \left(\sum_{\mathbf{c}''\ne\mathbf{0}} B(\lambda, w_H(\mathbf{c}'')) g(\lambda)^{w_H(\mathbf{c}'')} \right) \left(\sum_{\mathbf{c}} P(\mathbf{c}) \right) =$$

$$= \min_{\lambda>0} \sum_{\mathbf{c}''\ne\mathbf{0}} B(\lambda, w_H(\mathbf{c}'')) g(\lambda)^{w_H(\mathbf{c}'')} . \qquad (3.7)$$

Здесь суммирование по $\mathbf{c}''$ распространяется на такие кодовые последовательности, которые однажды ответвляются от нулевого пути, потом сливаются с ним и далее остаются нулевыми. Такие пути в кодовой решетке называются *петлями*. Это ограничение следует из требования, что последовательности $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}'$ соответствуют ошибочному событию; в этом случае их покомпонентная сумма по $\mathrm{mod}\,2$ соответствует петле.

В сумме по $\mathbf{c}''$ в выражении (3.7) выделим последовательности, имеющие одинаковый вес Хэмминга. Тогда можно записать, что

$$P_e \le \min_{\lambda>0} \sum_{\mathbf{c}''\ne\mathbf{0}} B(\lambda, w_H(\mathbf{c}'')) g(\lambda)^{w_H(\mathbf{c}'')} = \min_{\lambda>0} \sum_{w=d_f}^{\infty} N_w B(\lambda, w) g(\lambda)^w ,$$

где N_w - число петель в решетке, имеющих вес Хэмминга равный w, $w = d_f, d_f+1, \ldots$, d_f - свободное расстояние кода. Обозначим $D_0 = \min_{\lambda>0} g(\lambda) = g(\lambda_0)$, и $B(d_f) = B(\lambda_0, d_f)$, здесь λ_0 - оптимальное значение параметра оценки Чернова. Тогда можно получить границу вероятности ошибочного события в виде

$$P_e < \sum_{w=d_f}^{\infty} N_w B(w) D_0^w . \qquad (3.8)$$

Отметим, что каждое слагаемое $N_w B(w) D_0^w$ характеризует вклад ошибочного события, имеющего вес Хэмминга равный w. Поскольку величина $B(w)$ убывает с ростом w, то можно, слегка загрубляя неравенство, записать, что

$$P_e < B(d_f) \sum_{w=d_f}^{\infty} N_w D_0^w .$$

Напомним определение производящей функции весов сверточного кода

$$T(D, I) = \sum_{w=d_f}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} N_{wi} D^w I^i ,$$

где D и I - формальные переменные, а N_{wi} - число петель в кодовой решетке, имеющих вес w и информационный вес i. Отметим, что $\sum_i N_{wi} = N_w$. Тогда можно записать, что вероятность ошибочного события ограничена правой частью следующего неравенства

$$P_e < B(d_f) T(D, I)\big|_{D=D_0, I=1} = B(d_f) T(D)\big|_{D=D_0} , \qquad (3.9)$$

где $T(D) = T(D,1) = \sum_{w=d_f}^{\infty} N_w D^w$. Следует подчеркнуть, что величина D_0 зависит только от характеристик канала, а функция $T(Z, I)$ зависит только от структуры кода.

Для практики более важной величиной является вероятность ошибки на бит, то есть вероятность того, что декодированный двоичный символ на выходе Витерби окажется ошибочным. Заметим, что каждое ошибочное событие приводит к появлению одного или нескольких ошибочно декодированных бит. Точнее, если ошибочное событие имеет информационный вес i, то при его наступлении декодер выдаст i ошибочных бит. Поэтому вероятность ошибки на бит для кода со скоростью $R = k/n$ может быть оценена как

$$P_b < \frac{1}{k}\sum_{w=d_f}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} iN_{wi}B(w)D_0^w < \frac{B(d_f)}{k}\sum_{w=d_f}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} iN_{wi}D_0^w . \tag{3.10}$$

Для дальнейшего упрощения выражения (3.10) рассмотрим производную функции $T(D,I)$ по формальной переменной I в точке $I=1$. Она равна

$$\left.\frac{d}{dI}T(D,I)\right|_{I=1} = \left.\frac{d}{dI}\sum_{w=d_f}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} N_{wi}D^w I^i\right|_{I=1} = \left.\sum_{w=d_f}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} iN_{wi}D^w I^i\right|_{I=1} = \sum_{w=d_f}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} iN_{wi}D^w. \tag{3.11}$$

Сравнивая правые части (3.10) и (3.11), получаем окончательное выражение для оценки вероятности ошибки на бит при декодировании по алгоритму Витерби

$$P_b < \frac{B(d_f)}{k}\left.\frac{d}{dI}T(D,I)\right|_{D=D_0,I=1} = \frac{B(d_f)}{k}F(D)\big|_{D=D_0}, \tag{3.12}$$

где

$$F(D) = dT(D,I)/dI\big|_{I=1} = \sum\nolimits_{w=d_f}^{\infty} N'_w D^w .$$

Суммы в выражениях (3.9) и (3.12) можно раскрыть, то есть записать границы в виде

$$P_e < B(d_f)\left(N_{d_f}D_0^{d_f} + N_{d_f+1}D_0^{d_f+1} + N_{d_f+2}D_0^{d_f+2} + N_{d_f+3}D_0^{d_f+3} + \ldots\right),$$

$$P_b < \frac{B(d_f)}{k}\left(N'_{d_f}D_0^{d_f} + N'_{d_f+1}D_0^{d_f+1} + N'_{d_f+2}D_0^{d_f+2} + N'_{d_f+3}D_0^{d_f+3} + \ldots\right).$$

В тех случаях, когда известны только несколько первых коэффициентов разложения в ряд функций $T(D)$ и $F(D)$, можно ограничиться несколькими первыми слагаемыми этих рядов. Для того чтобы избежать сильной погрешности, связанной с усечением бесконечного ряда, достаточно обычно учесть 3-5 первых коэффициентов.

Заметим, что в литературе обычно приводятся выражения для оценки вероятности ошибки на бит и вероятности ошибочного события, построенные на основе обычной, а не модифицированной границы Чернова как в нашем рассмотрении. Они совпадают с правыми частями неравенств (3.9) и (3.12) при замене $B(d_f)$ ее верхней границей, $B(d_f) < 1$.

Итак, для вычисления границ для вероятности ошибочного события (9) и вероятности ошибки на бит (3.12) достаточно иметь выражение для производящей функции весового спектра кода $T(D,I)$ и выражения для показателя и коэффициента оценки Чернова то есть величин D_0 и $B(d_f)$ соответственно. Как уже отмечалось, эти величины зависят от параметров канала. Рассмотрим их получение для некоторых важных частных случаев.

3.3. Двоичный симметричный канал.

В двоичном симметричном канале (ДСК) оптимальное декодирование совпадает с декодированием по минимуму расстояния Хэмминга, то есть в качестве метрики декодирования используется величина $M(\mathbf{y},\mathbf{c}) = -d_H(\mathbf{y},\mathbf{c})$. Тогда $\Pr[M(\mathbf{y},\mathbf{c}') - M(\mathbf{y},\mathbf{c}) > 0] = \Pr[d_H(\mathbf{y},\mathbf{c}) - d_H(\mathbf{y},\mathbf{c}') > 0]$. Нетрудно заметить, что эта вероятность зависит только от вероятности ошибки в ДСК p и расстояния Хэмминга между последовательностями $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}'$. Обозначим эту вероятность как $\Pr[M(\mathbf{y},\mathbf{c}') - M(\mathbf{y},\mathbf{c}) > 0] = P[w]$, если $d_H(\mathbf{c},\mathbf{c}') = w$. С использованием модифицированной границы Чернова можно получить, что

$$P[w] < B(w) D_0^w,$$

где

$$D_0 = 2\sqrt{p(1-p)} \tag{3.13а}$$

$$B(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi w}(1-2p)}, \tag{3.13б}$$

p - вероятность ошибки в двоичном симметричном канале. Подстановка этих выражений в (3.9) и (3.12) дает верхние границы вероятности ошибочного события и вероятности ошибки на бит при использовании алгоритма Витерби в ДСК.

Более точная оценка, также следующая из модифицированной границы Чернова, имеет вид

$$P[w] < \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(w+1)}(1-2p)}\left(2\sqrt{p(1-p)}\right)^{w+1} & \text{для нечетных } w, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi w}(1-2p)}\left(2\sqrt{p(1-p)}\right)^{w} & \text{для четных } w. \end{cases} \tag{3.14}$$

Тогда для вероятности ошибочного события и вероятности ошибки на бит можно записать, что

$$P_e < \frac{K(d_f)}{2}\left[(1+D)T(D,I) + (1-D)T(-D,I)\right]\Big|_{D=2\sqrt{p(1-p)},I=1}, \tag{3.15}$$

$$P_b < \frac{K(d_f)}{2k}\frac{d}{dI}\left[(1+D)T(D,I) + (1-D)T(-D,I)\right]\Big|_{D=2\sqrt{p(1-p)},I=1}, \tag{3.16}$$

где

$$K(d_f) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(d_f+1)}(1-2p)} & \text{для нечетных } d_f, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi d_f}(1-2p)} & \text{для четных } d_f. \end{cases}$$

Доказательство границ (3.15) и (3.16), известных также как границы ван де Миберга (van de Meeberg, 1974), предлагается в качестве упражнения (следует выполнить подстановку правой части (3.14) в (3.9) и (3.12)).

Двоичный симметричный канал обычно получается путем жесткого квантования величин на выходе оптимального демодулятора при двоичной передаче. Поэтому вероятность ошибки в ДСК p можно выразить через параметры непрерывного канала. Например, если ДСК получен путем принятия жестких посимвольных решений в канале с аддитивным белым гауссовским шумом при использовании двоичных противоположных сигналов, то $p = Q(\sqrt{2E/N_0})$, где E/N_0 - отношение сигнал/шум, $Q(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_x^{\infty}\exp(-u^2/2)du$. Если же двоичная передача ведется по каналу с аддитивным белым гауссовским шумом и случайной фазой и используются ортогональные ЧМ сигналы, то $p = (1/2)e^{-E/2N_0}$. Поэтому вероятность ошибки декодирования при использовании алгоритма Витерби в канале с жестким квантованием (т.е. приведенном к ДСК) можно выразить как функцию от отношения сигнал/шум. Для правильного сравнения передачи с кодированием и без кодирования следует выразить вероятность ошибки декодирования как функцию от отношения сигнал/шум на бит, которое определяется как

$$\left(\frac{E}{N_0}\right)_{bit} = \frac{1}{R}\frac{E}{N_0},$$

где R - скорость кода. Заметим, что при передаче без кодирования $(E/N_0)_{bit} = E/N_0$, так как в этом случае $R = 1$. Обычно зависимость P_b от $(E/N_0)_{bit}$ выражается графически, причем величина P_b откладывается в *логарифмическом* масштабе, а отношение сигнал/шум на бит выражается в *децибелах* (дБ), т.е. $(E/N_0)_{bit,,\text{дБ}} = 10\log_{10}(E/N_0)_{bit}$. На том же графике в этом же масштабе строится зависимость вероятности ошибки p от отношения сигнал/шум E/N_0, выраженного в дБ, $(E/N_0)_{\text{дБ}} = 10\log_{10}(E/N_0)$. Сравнивая значения отношения сигнал/шум, требуемые для достижения некоторого значения вероятности ошибки на бит (например, 10^{-5}) при использовании кодирования и без него, можно оценить величину *энергетического выигрыша* от применения кодирования. Можно показать, что с ростом отношения сигнал/шум энергетический выигрыш в гауссовском канале с жесткими решениями стремится к асимптоичекому знвчению $d_f R/2$ или к $10\log_{10}(d_f R/2\ )$ дБ.

3.4.Гауссовский канал с непрерывным выходом.

Для определенности будем полагать, что для передачи используются двоичные противоположные сигналы вида $s_0(t) = \sqrt{E}\varphi(t)$, $s_1(t) = -\sqrt{E}\varphi(t)$, где E - энергия сигнала, $\varphi(t)$ - нормированная функция определяющая форму и спектр сигнала. Сигнал на выходе канала имеет вид $r(t) = s(t) + n(t)$, где $s(t) \in \{s_0(t), s_1(t)\}$, $n(t)$ - аддитивный белый гауссовский шум со спектральной плотностью мощности $N_0/2$. Демодулятор на каждом сигнальном интервале вычисляет величину $y = \int_0^T r(t)\varphi(t)dt$, которая и рассматривается как непрерывный выход канала. Определим последовательность на выходе канала с непрерывным выходом как $\mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(l)}, ...)$, а кодовую последовательность как $\mathbf{c} = (c^{(1)}, c^{(2)}, ..., c^{(l)}, ...)$. Тогда метрика максимального правдоподобия может быть представлена как

$$M(\mathbf{y},\mathbf{c}) = \sum_l y^{(l)}(-1)^{c^{(l)}}. \qquad (3.17)$$

Тогда

$$\Pr\left[M(\mathbf{y},\mathbf{c}')-M(\mathbf{y},\mathbf{c})>0\right]=\Pr\left[\sum_{l}(y^{(l)}(-1)^{c'^{(l)}}-y^{(l)}(-1)^{c^{(l)}})>0\right].$$

Легко видеть, что эта вероятность зависит только от расстояния Хэмминга между $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}'$. Обозначим эту вероятность как $\Pr\left[M(\mathbf{y},\mathbf{c}')-M(\mathbf{y},\mathbf{c})>0\right]=P[w]$, если $d_H(\mathbf{c},\mathbf{c}')=w$. С использованием модифицированной границы Чернова можно получить, что $P[w]<B(w)D_0^w$, где

$$D_0=e^{-\frac{E}{N_0}} \qquad (3.18а)$$

$$B(w)=\frac{1}{2\sqrt{\pi wE/N_0}}, \qquad (3.18б)$$

а величина E/N_0 играет роль отношения сигнал/шум. Отсюда следуют окончательные выражения для границ

$$P_e<\frac{1}{2\sqrt{\pi d_f E/N_0}}T(D)\Big|_{D=e^{-E/N_0}} \qquad (3.19а)$$

$$P_b<\frac{1}{k}\frac{1}{2\sqrt{\pi d_f E/N_0}}F(D)\Big|_{D=e^{-E/N_0}}. \qquad (3.19б)$$

Заметим, что точное значение вероятности $P[w]$ может быть вычислено как $P[w]=Q(\sqrt{2wE/N_0})$, где $Q(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_x^\infty \exp(-u^2/2)du$. Суммирование этих значений по $w=d_f,d_f+1,d_f+2,....$ для данного кода и использование подходящей границы для функции $Q(\cdot)$ приводит в итоге к оценкам (3.19). Обычно такой подход и рассматривается в литературе.

Как и в случае жесткого квантования выхода канала для декодирования в канале с непрерывным выходом можно рассмотреть величину энергетического выигрыша от кодирования. Для этого, как и ранее, надо нужно построить зависимость P_b от $(E/N_0)_{bit}$. При этом величина P_b откладывается в *логарифмическом* масштабе, от отношение сигнал/шум на бит выражается в *децибелах* (дБ), т.е. $(E/N_0)_{bit,,\text{дБ}}=10\log_{10}(E/N_0)_{bit}$. На том же графике в этом же масштабе строится зависимость вероятности ошибки при передаче без кодирования p от отношения сигнал/шум E/N_0, выраженного в дБ, $(E/N_0)_{\text{дБ}}=10\log_{10}(E/N_0)$. Сравнивая значения отношения сигнал/шум, требуемые для достижения некоторого значения вероятности ошибки на бит при использовании кодирования и без него, можно оценить величину *энергетического выигрыша* от использования кодирования. Можно показать, что с ростом отношения сигнал/шум энергетический выигрыш в гауссовском канале с мягкими решениями (непрерывным выходом) стремится к асимптотическому значению $d_f R$ или к $10\log_{10}(d_f R\ )$ дБ.

3.5. Гауссовский канал со случайной фазой. Непрерывный выход.

Предположим, что для передачи используются двоичные ЧМ сигналы вида $s_0(t)=\sqrt{2E/T}\cos 2\pi f_0 t$, $s_1(t)=\sqrt{2E/T}\cos 2\pi f_1 t$, где E - энергия сигнала, T - длительность сигнала, а несущие частоты f_0 и f_1 выбраны так, что сигналы $s_0(t)$ и $s_1(t)$ ортогональны в усиленном смысле. Сигнал на выходе канала имеет вид

$r(t)=\sqrt{2E/T}\cos(2\pi f_i t+\theta)+n(t)$, где $n(t)$ - аддитивный белый гауссовский шум со спектральной плотностью мощности $N_0/2$, θ - случайный фазовый сдвиг, $i=0,1$. Оптимальный демодулятор на каждом сигнальном интервале вычисляет величины $y_0=r_{c0}^2+r_{s0}^2$ и $y_1=r_{c1}^2+r_{10}^2$, где

$$r_{ci}=\int_0^T r(t)\sqrt{2/T}\cos(2\pi f_i t)dt$$

$$r_{si}=\int_0^T r(t)\sqrt{2/T}\sin(2\pi f_i t)dt\ ,$$

$i=0,1$. Величины y_0 и y_1 играют роль непрерывного выхода канала. Обозначим последовательности величин y_0 и y_1 как $\mathbf{y}_0=(y_0^{(1)},y_0^{(2)},...,y_0^{(l)},...)$ и $\mathbf{y}_1=(y_1^{(1)},y_1^{(2)},...,y_1^{(l)},...)$ соответственно, а кодовую последовательность как $\mathbf{c}=(c^{(1)},c^{(2)},...,c^{(l)},...)$. Тогда метрика максимального правдоподобия может быть представлена как

$$M(\mathbf{y},\mathbf{c})=\sum_l y_{c^{(l)}}^{(l)}\ , \tag{3.20}$$

то есть l-ое слагаемое в этой сумме равно $y_0^{(l)}$ или $y_1^{(0)}$ в зависимости от значения кодового символа $c^{(l)}$. Тогда

$$\Pr\left[M(\mathbf{y},\mathbf{c}')-M(\mathbf{y},\mathbf{c})>0\right]=\Pr\left[\sum_l (y_{c'^{(l)}}^{(l)}-y_{c^{(l)}}^{(l)})>0\right].$$

Как и прежде, эта вероятность зависит только от расстояния Хэмминга между $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}'$ и обозначается как $\Pr\left[M(\mathbf{y},\mathbf{c}')-M(\mathbf{y},\mathbf{c})>0\right]=P[w]$, если $d_H(\mathbf{c},\mathbf{c}')=w$. С использованием модифицированной границы Чернова можно получить, что

$$P[w]<\min_{0<\lambda<1} B(\lambda,w)\left(\frac{1}{1-\lambda^2}e^{-\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{E}{N_0}}\right)^w\ , \tag{3.21}$$

где

$$B(\lambda,w)=\frac{w}{(2w-1)\sqrt{\pi w}}\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}}\ . \tag{3.22}$$

Отметим, что обычная граница Чернова для этого случая имеет вид

$$P[w]<\min_{0<\lambda<1}\left(\frac{1}{1-\lambda^2}e^{-\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{E}{N_0}}\right)^w\ . \tag{3.23}$$

Для правой части (3.23) оптимальное значение параметра λ может быть найдено из условия

$$\frac{d}{d\lambda}\left(-\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{E}{N_0}-\log(1-\lambda^2)\right)=0$$

или

$$\frac{1}{(1+\lambda)^2}\frac{E}{N_0}-\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}=0\,,$$

откуда следует, что

$$\lambda_0=\frac{\sqrt{(E/N_0)^2+12(E/N_0)+4}-(E/N_0+2)}{4}\,. \qquad (3.24)$$

Окончательно имеем $P[w]<B(w)D_0^w$, где

$$D_0=\left(\frac{1}{1-\lambda_0^2}e^{-\frac{\lambda_0}{1+\lambda_0}\frac{E}{N_0}}\right)^w, \qquad (3.25а)$$

$$B(w)=\frac{w}{(2w-1)\sqrt{\pi w}}\sqrt{\frac{1-\lambda_0^2}{\lambda_0^2}}\,. \qquad (3.25б)$$

Подстановка этих выражений в (3.9) и (3.12) дает верхние границы вероятности ошибочного события и вероятности ошибки на бит алгоритма Витерби в гауссовском канале со случайной фазой при использовании при декодировании непрерывного выхода канала. Энергетический выигрыш от кодирования в гауссовском канале со случайной фазой определяется по той же методике, что и в ранее рассмотренных примерах. При этом следует иметь в виду, что при передаче без кодирования вероятность ошибки выражается в этом случае как $p=(1/2)e^{-E/2N_0}$.

3.6. Порядок выполнения работы

1. Получить у преподавателя вариант задания: параметры кода(-ов) и канала (-ов).
2. Предложить список кодов, удовлетворяющих заданию, и основываясь на ориентировочных предположениях о корректирующих свойствах, выбрать из этого списка коды перспективные для исследования.
3. Рассчитать производящие функции для кодов, выбранных для исследования.
4. Составить и отладить программу вычисления оценок вероятности ошибки для исследуемых кодов и каналов.
5. Выполнить расчеты вероятности ошибки.
6. Построить графики по результатам расчетов, оценить эффективность кодирования, оценить величину энергетического выигрыша на уровне вероятности ошибки на бит 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}. Оценить выигрыш от использования непрерывного выхода канала.

3.7. Контрольные вопросы

1. В чем состоит принцип декодирования по максимуму правдоподобия?
2. Доказать, что в ДСК декодирование по максимуму правдоподобия эквивалентно декодированию по минимуму расстояния Хэмминга.
3. Могут ли два кода с одинаковыми значениями свободного расстояния и одинаковой скоростью обладать различной помехоустойчивостью?
4. Могут ли два кода с одинаковой скоростью и одинаковыми спектрами весов обладать различной помехоустойчивостью?
5. Получить выражения (3.13).
6. Получить выражения (3.15) и (3.16).
7. Получить выражение для асимптотического значения энергетического выигрыша в гауссовском канале с жесткими и мягкими решениями.

Приложение.

1. Граница Чернова

Пусть Z - некоторая случайная величина. Требуется определить значение вероятности $P = \Pr[Z \geq 0]$. Эта вероятность равна по определению

$$P = \int_0^{\infty} w_Z(x)dx\,, \tag{П.1}$$

где $w_Z(\cdot)$ - функция плотности вероятностей случайной величины Z. Вычисление вероятности P по формуле (1) может оказаться затруднительным или невозможным, например, из-за того, что вид функции $w_Z(\cdot)$ может быть неизвестен.

Введем функцию единичного скачка

$$e(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \tag{П.2}$$

тогда $P = \int_{-\infty}^{\infty} e(x)w_Z(x)dx = \overline{e(Z)}$, черта здесь и далее обозначает усреднение по всем случайным величинам, от которых зависит выражение под чертой. Поскольку $e(x) \leq e^{\lambda x}$ при $\lambda \geq 0$, то $P \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} w_Z(x)dx = \overline{e^{\lambda Z}} = g_Z(\lambda)$, где $g_Z(\lambda)$ называется производящей функцией моментов случайной величины Z. Если $Z = \sum_{i=1}^{N} z_i$, z_i - независимые и одинаково распределенные случайные величины, то $g_Z(\lambda) = g(\lambda)^N$, где $g(\lambda) = \overline{e^{\lambda z_i}}$ - производящая функция моментов случайной величины z_i. Поэтому можно записать, что $\Pr[\Sigma_{i=1}^{N} z_i > 0] \leq g(\lambda)^N$. Поскольку параметр оценки λ может принимать любые неотрицательные значения, границу можно оптимизировать по λ. В итоге получаем выражение для границы Чернова

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{N} z_i > 0\right] \leq D_0^N\,, \tag{П.3}$$

где $D_0 = \min_{\lambda > 0} g(\lambda)$. Вычисление оценки часто оказывается значительно более простым, чем получение точного значения по формуле (П.1).

Граница Чернова может быть слегка уточнена, если рассмотреть ее модификацию.

2. Модифицированная граница Чернова

Рассматривается та же задача – вычисление вероятности, определенной равенством (П.1). Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ некоторые функции, такие что $f(x)\varphi(x) = e(x)$, где $e(x)$ - функция единичного скачка, определенная равенством (П.2). Ясно, что $P = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)w_Z(x)dx$. Обозначим $F(\omega)$ преобразование Фурье функции $f(x)$, то есть $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$, а $f(x) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega x}d\omega$. Тогда можно записать, что

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)w_Z(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega x}d\omega\right)\varphi(x)w_Z(x)dx = .$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)w_Z(x)e^{j\omega x}dx\right)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\Phi_Z(\omega)d\omega\,,$$

где $\Phi_Z(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) w_Z(x) e^{j\omega x} dx$.

Положим $\varphi(x) = e^{\lambda x}$, где $\lambda > 0$, и

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Очевидно, что $f(x)\varphi(x) = e(x)$. Тогда

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} e^{-j\omega x} dx = \frac{1}{\lambda + j\omega},$$

и

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} e^{j\omega x} w_Z(x) dx = \frac{1}{2\pi}\overline{e^{(\lambda + j\omega)Z}} = \frac{1}{2\pi} C_Z(\omega - j\lambda),$$

где

$$C_Z(\alpha) = \overline{e^{j\alpha Z}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha x} w_Z(x) dx$$

- характеристическая функция случайной величины Z. Следовательно, искомая вероятность P может быть найдена как

$$P = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{C_Z(\omega - j\lambda)}{\lambda + j\omega} d\omega, \qquad (П.4)$$

где $\lambda > 0$. В некоторых случаях вычисление значения этого интеграла (или его верхней оценки) оказывается более простым, чем вычисление правой части выражения (П.1); в частности, возможно применение следующей верхней оценки

$$P = |P| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{C_Z(\omega - j\lambda)}{\lambda + j\omega} d\omega\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{C_Z(\omega - j\lambda)}{\lambda + j\omega}\right| d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|C_Z(\omega - j\lambda)|}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} d\omega,$$

приводящей в итоге границе

$$P \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|C_Z(\omega - j\lambda)|}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} d\omega, \quad \lambda > 0 \qquad (П.5)$$

Границу (П.5) можно уточнить, минимизируя ее по λ, поскольку значение параметра $\lambda > 0$ произвольно. В таком виде эта граница встречалась в работе Prabhu V.K. “Modified Chernoff for PAM systems for noise and interference”. IEEE Trans.Information Theory, vol. IT-28, 1982, N1, pp.95-100.

Наиболее полезными выражения (П.4) и (П.5) оказываются, когда случайная величина Z представляет собой сумму некоторых других случайных величин. В этом случае

$$C_Z(\alpha) = \overline{e^{j\alpha Z}} = \overline{e^{j\alpha \sum_{i=1}^{N} z_i}} = \overline{\prod_{i=1}^{N} e^{j\alpha z_i}} = \prod_{i=1}^{N} \overline{e^{j\alpha z_i}} = C_z(\alpha)^N = g(j\alpha)^N$$

где $C_z(\alpha)=\overline{e^{j\alpha z_i}}$ - характеристическая функция случайной величины z_i, а $g(\lambda)=\overline{e^{\lambda z_i}}$ - производящая функция моментов этой случайной величины.

В некоторых частных случаях можно подобрать оптимальное значение параметра λ и представить функцию $C_Z(\omega - j\lambda)$ в виде

$$C_Z(\omega - j\lambda_0) = K_1(\omega,N)g(\lambda_0)^N = K_1(\omega,N)D_0^N . \qquad (\text{П.6})$$

Подстановка этого выражения в (П.4) приводит к границе

$$P = D_0^N \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_1(\omega,N)}{\lambda + j\omega}d\omega = A(N)D_0^N < B(N)D_0^N ,$$

где $A(N)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_1(\omega,N)}{\lambda + j\omega}d\omega$. Интеграл $A(N)$ удается довольно точно оценить как $A(N)<B(N)$, где $B(N)<1$ и $B(N)\sim N^{-1/2}$. В итоге получаем выражение для модифицированной границы Чернова

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{N} z_i > 0\right] < B(N)D_0^N . \qquad (\text{П.7})$$

Сравнение выражений (П.3) и (П.7) показывает, что уточнение границы Чернова обеспечивается наличием коэффициента $B(N)$ в правой части неравенства.

В других случаях удобное представление вида (П.6) получить не удается, но удается получить выражение

$$\left|C_Z(\omega - j\lambda_0)\right| = K_2(\omega,N)g(\lambda_0)^N = K_2(\omega,N)D_0^N , \qquad (\text{П.8})$$

подстановка которого в (П.5) и последующая оценка интеграла приводит к выражению (П.7).