

Лекция 4

РЕКУРРЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ

ЗАДАЧА О ЧИСЛЕ СЧАСТЛИВЫХ БИЛЕТОВ

Рассмотрим следующую задачу. Имеются билеты с номерами от 000000 до 999999. Счастливым признается билет, у которого сумма первых трех цифр равна сумме трех последних цифр. Необходимо подсчитать число счастливых билетов. На Рис 1 приведен алгоритм, позволяющий решить эту задачу “в лоб”. Нетрудно подсчитать, что в этом случае для решения задачи потребуется выполнить 10^6 сравнений.

Попробуем переформулировать задачу. Обозначим через M сумму первых (последних) трех цифр в номере. Очевидно, что $0 \leq M \leq 27$. Рассмотрим возможные представления M в виде суммы трех слагаемых.

Пусть $M = 0$, тогда возможно единственное представление $M = 0 + 0 + 0$ (первые три цифры), которому соответствует единственное представление $0 + 0 + 0$ (последние три цифры).

Если $M = 1$, то возможны три варианта представления этого числа в виде суммы первых трех цифр, а именно, $0 + 0 + 1$, $0 + 1 + 0$, $1 + 0 + 0$. Каждому из вариантов соответствуют три такие же варианта представления суммы последних трех цифр. Таким образом, мы получаем, что существует 9 счастливых билетов, у которых сумма цифр равна 1.

Для $M = 2$ имеем $0 + 0 + 2$, $0 + 2 + 0$, $2 + 0 + 0$, $0 + 1 + 1$, $1 + 0 + 1$, $1 + 1 + 0$, итого шесть вариантов. Таким образом, число счастливых билетов, у которых сумма цифр равна 2, составляет 36. Обобщая сказанное, получаем, что число счастливых билетов C можно подсчитать по формуле

$$C = \sum_{M=0}^{27} \{Q(M)\}^2, \quad (1)$$

где $Q(M)$ – это число представлений числа M в виде трех суммы слагаемых (число разбиений числа M на три слагаемых).

Алгоритм для подсчета числа счастливых билетов по формуле (1) приведен на Рис. 2. Этот алгоритм требует $10^3 + 27$ операций.

Попытаемся теперь найти рекуррентный алгоритм вычисления числа счастливых билетов. Прежде всего, заметим, что числа представлений в виде суммы трех слагаемых для $M = 0$ и $M = 27$ одинаковы и равны 1, так как $0 = 0 + 0 + 0$ и $27 = 9 + 9 + 9$. То же самое справедливо для пары $M = 1$ и $M = 26$ ($0 + 0 + 1$, $0 + 1 + 0$, $1 + 0 + 0$, $9 + 9 + 8$, $9 + 8 + 9$, $8 + 9 + 9$) и т.д. Таким образом, нет необходимости рассматривать все значения M от 0 до 27. Достаточно вычислить $\{Q(M)\}^2$ для M от 0 до 13 и получить число счастливых билетов по формуле

$$C = 2 \sum_{M=0}^{13} \{Q(M)\}^2.$$

Заметим также, что число представлений M в виде суммы трех слагаемых $Q(M, 3)$ можно выразить следующим образом

$$Q(M, 3) = Q(M, 2) + Q(M - 1, 2) + Q(M - 2, 2) + \dots + Q(M - 9, 2), \quad (2)$$

где $Q(M, N)$ обозначает число представлений числа M в виде суммы N слагаемых. Подставим в формулу (2) вместо M число $M - 1$. Получаем

$$Q(M - 1, 3) = Q(M - 1, 2) + Q(M - 2, 2) + Q(M - 3, 2) + \dots + Q(M - 10, 2). \quad (3)$$

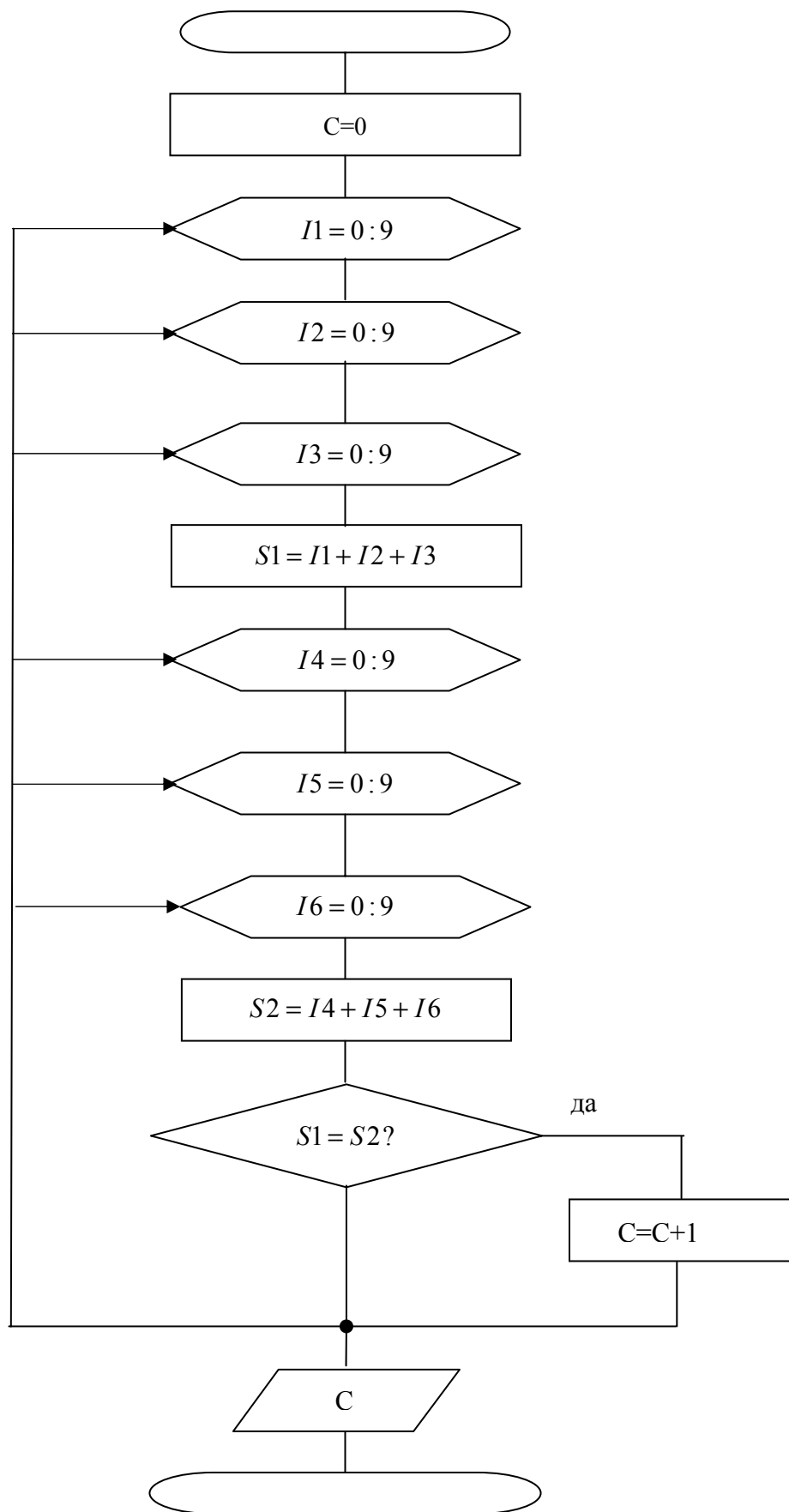


Рис.1. Подсчет числа счастливых билетов полным перебором

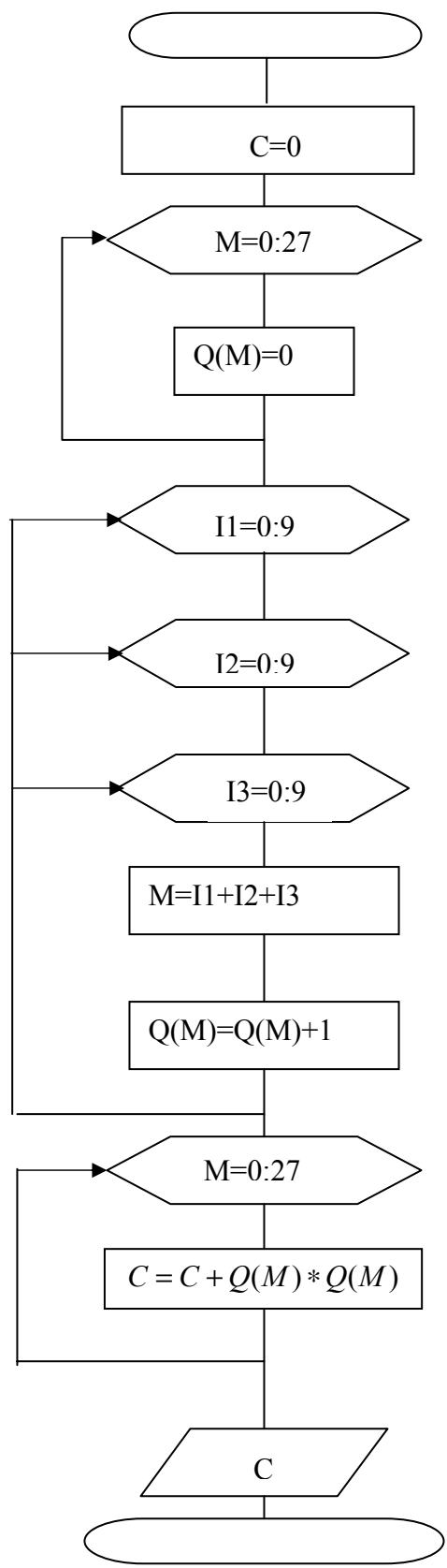


Рис.2. Алгоритм, основанный на переборе вариантов представления чисел $0, \dots, 27$ в виде суммы трех слагаемых.

Сравнивая (2) и (3) получаем

$$Q(M,3) = Q(M-1,3) + Q(M,2) - Q(M-10,2). \quad (4)$$

Аналогично, имеем

$$Q(M,2) = Q(M-1,2) + Q(M,1) - Q(M-10,1). \quad (5)$$

Отметим также, что

$$Q(0,N) = 1, \\ Q(M,N) = 0, \quad M < 0$$

и

$$Q(M,1) = \begin{cases} 1, & M \leq 9 \\ 0, & M > 9 \end{cases}.$$

Алгоритм подсчета числа счастливых билетов по формулам (4) и (5) представлен на Рис.3, 4.

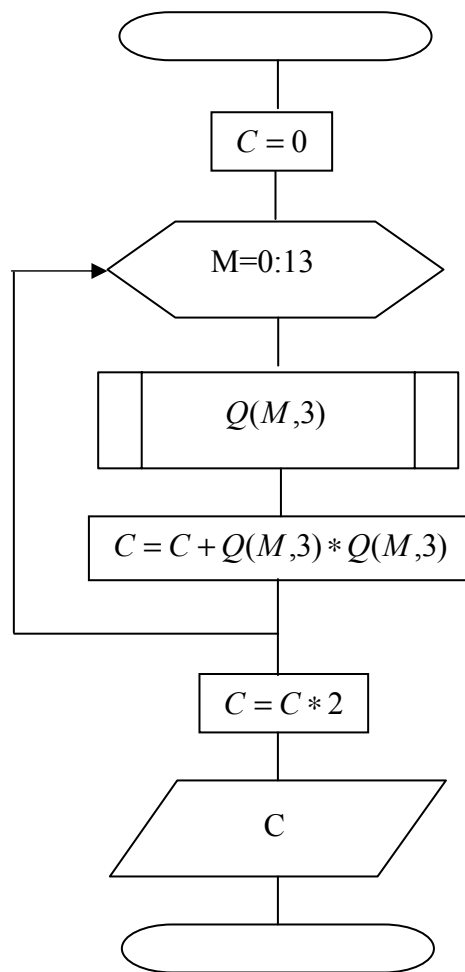


Рис.3. Подсчет по числа счастливых билетов по формуле (4)

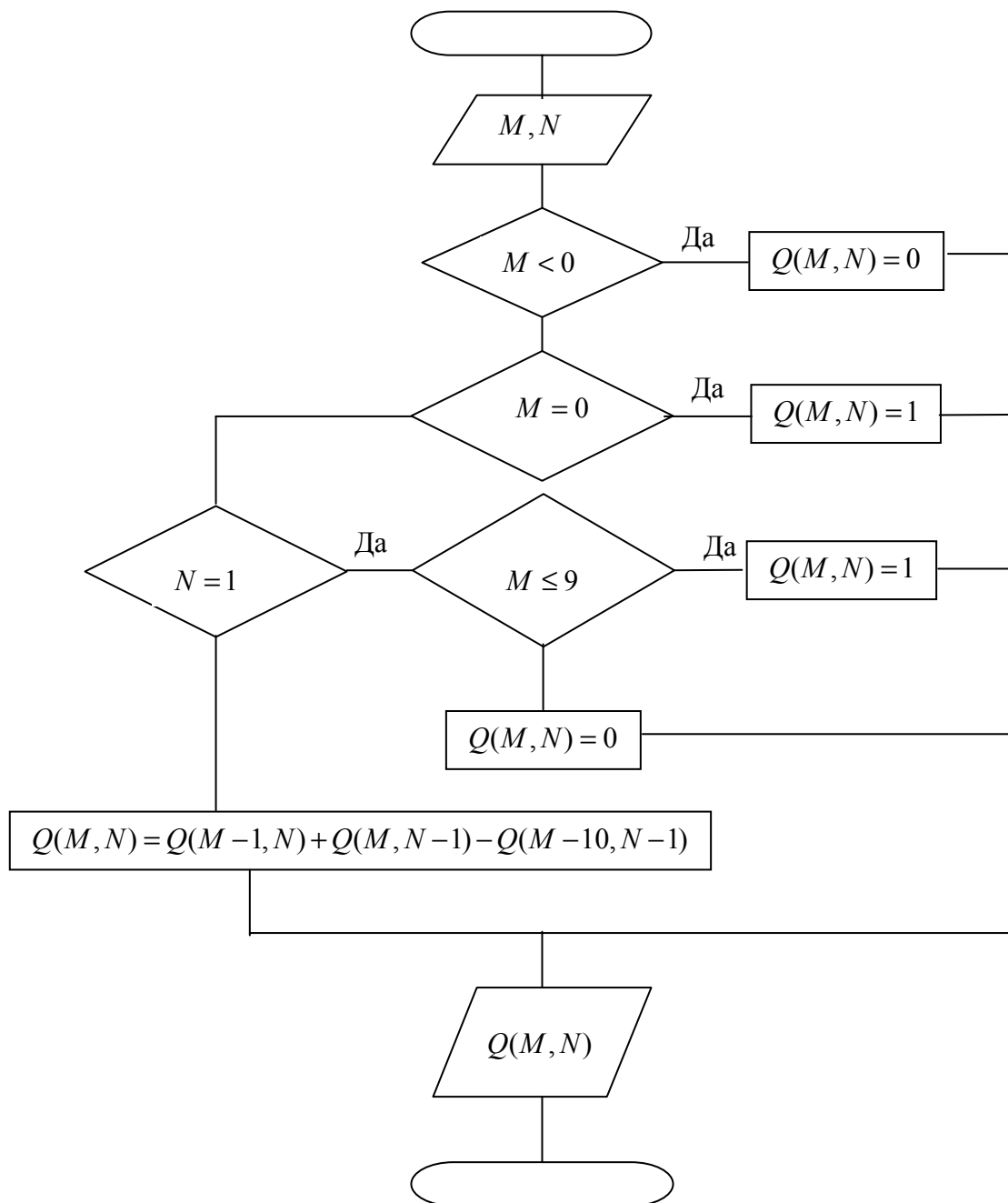


Рис.4. Модуль подсчета $Q(M, N)$.

Очевидно, что уравнения (4),(5) представляют собой неоднородные рекуррентные уравнения. Применим известные нам методы решения уравнений этого типа.

Рассмотрим вначале случай $M \leq 9$. Тогда уравнение (5) имеет вид

$$Q(M, 2) = Q(M - 1, 2) + 1, \quad Q(0, 2) = 1. \quad (6)$$

Составим характеристическое уравнение

$$r - 1 = 0,$$

решение соответствующего ОЛРУ имеет вид

$$Q_0(M, 2) = C_1.$$

Так как число 1 является корнем кратности $m = 1$ данного характеристического уравнения, то будем искать его частное решение в виде

$$Q_p(M, 2) = C_2 M.$$

Подставляя частное решение в уравнение (6)

$$C_2 M - C_2(M - 1) = 1,$$

находим, что $C_2 = 1$.

Тогда решение НЛРУ имеет вид

$$Q(M, 2) = C_1 + M.$$

Подставляя начальное условие, получаем

$$C_1 = 1$$

и

$$Q(M, 2) = M + 1.$$

Подставляя полученное решение в (4), имеем

$$Q(M, 3) = Q(M - 1, 3) + M + 1, \quad Q(0, 3) = 1. \quad (7)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$r - 1 = 0,$$

решение соответствующего ОЛРУ

$$Q_0(M, 3) = C_1.$$

Так как 1 является корнем кратности $m = 1$ характеристического уравнения, то будем искать частное решение в виде

$$Q_p(M, 3) = (AM + B)M = AM^2 + BM.$$

Подставляем частное решение в (7)

$$AM^2 + BM = A(M - 1)^2 + B(M - 1) + M + 1$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях M , получаем

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ A - B = -1 \end{cases}$$

т.е. $A = 1/2$ и $B = 3/2$. Окончательно,

$$Q(M, 3) = C_1 + M^2/2 + 3M/2.$$

Из начальных условий находим, что $C_1 = 1$, таким образом,

$$Q(M, 3) = 1 + M^2/2 + 3M/2.$$

Теперь рассмотрим случай $M > 9$. Уравнение (5) в этом случае имеет вид

$$Q(M, 2) = Q(M - 1, 2) - 1, \quad (8)$$

так как $Q(M - 10, 1) = 1$ и $Q(M, 1) = 0$.

Начальное условие получим из решения уравнения (6),

$$Q(9, 2) = 1 + 9 = 10.$$

Решаем (8), $Q_0(M, 2) = C_1$, $Q_p(M, 2) = C_2 M$. Находим, что $C_2 = -1$. Используя начальное условие, получаем окончательный ответ:

$$Q(M, 2) = 19 - M. \quad (9)$$

Для $M > 9$ уравнение (4) имеет вид

$$Q(M, 3) = Q(M - 1, 3) + 19 - M - M + 9,$$

так как $Q(10 - 10, 2) = 1$, $Q(11 - 10, 2) = 2$, $Q(12 - 10, 2) = 3$, $Q(13 - 10, 2) = 4$. Начальное условие получаем из решения уравнения (7), $Q(9, 3) = 1 + 81/2 + 3 \times 9/2 = 55$.

Решаем (9):

$$Q_0(M, 3) = C_1, \quad Q_p(M, 3) = AM^2 + BM.$$

Подставляя частное решение в уравнение, получаем

$$AM^2 + BM = A(M - 1)^2 + B(M - 1) + 28 - 2M.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях M , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2A = -2 \\ A - B = -28 \end{cases}$$

Решения системы уравнений: $A = -1$ и $B = 27$. Таким образом, имеем

$$Q(M,3) = C_1 - M^2 + 27M.$$

Используя начальное условие, находим, что $C_1 = 55 + 81 - 27 \times 9 = -243 + 136 = -107$.

Тогда решение имеет вид

$$Q(M,3) = -107 - M^2 + 27M.$$

Алгоритм нахождения числа счастливых билетов с использованием полученных выражений для $Q(M,3)$ приведен на Рис.5.

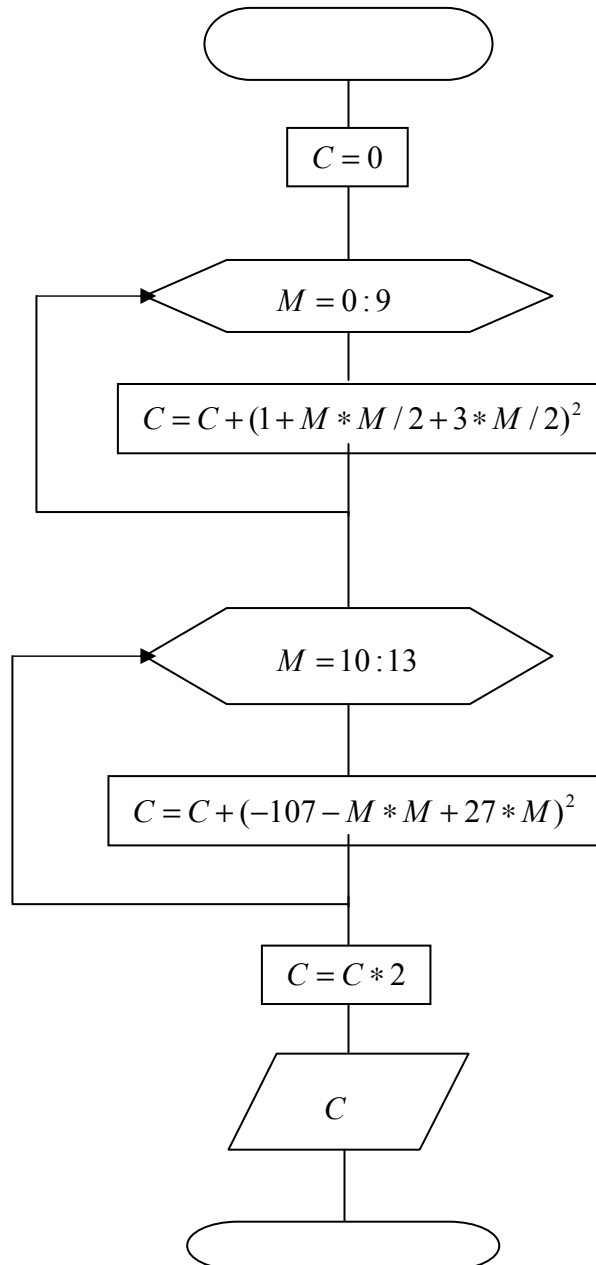


Рис. 5. Эффективный алгоритм подсчета числа счастливых билетов

ПРИМЕРЫ АЛГОРИТМОВ СОРТИРОВКИ

Рассмотрим задачу сортировки элементов последовательности. Пусть задана последовательность, например, 2, 10, 1, 15, 3, 4. Необходимо расставить элементы последовательности в порядке убывания (возрастания), т.е. 15, 10, 4, 3, 2, 1 (1, 2, 3, 4, 10, 15). *Сортировка обменом* предполагает, что на каждом проходе алгоритма два соседних элемента последовательности, расположение которых не соответствует порядку, меняются местами (происходит обмен). Процедура либо повторяется столько раз сколько элементов в последовательности (*сортировка «пузырьком»*), либо до тех пор пока остаются такие пары (*сортировка пузырьком с флажком*). Алгоритм сортировки «пузырьком» представлен на Рис.6. Оценим временную сложность алгоритма сортировки «пузырьком». Очевидно, что на каждом из N проходов алгоритма сортировки, где N - число элементов последовательности, производится $N - I$ сравнений. Другими словами, общее число сравнений можно подсчитать по формуле

$$N - 1 + N - 2 + \dots + 1 = (N - 1)N / 2.$$

Таким образом, временная сложность этого алгоритма сортировки имеет порядок N^2 , т.е. $T(N) = CN^2$.

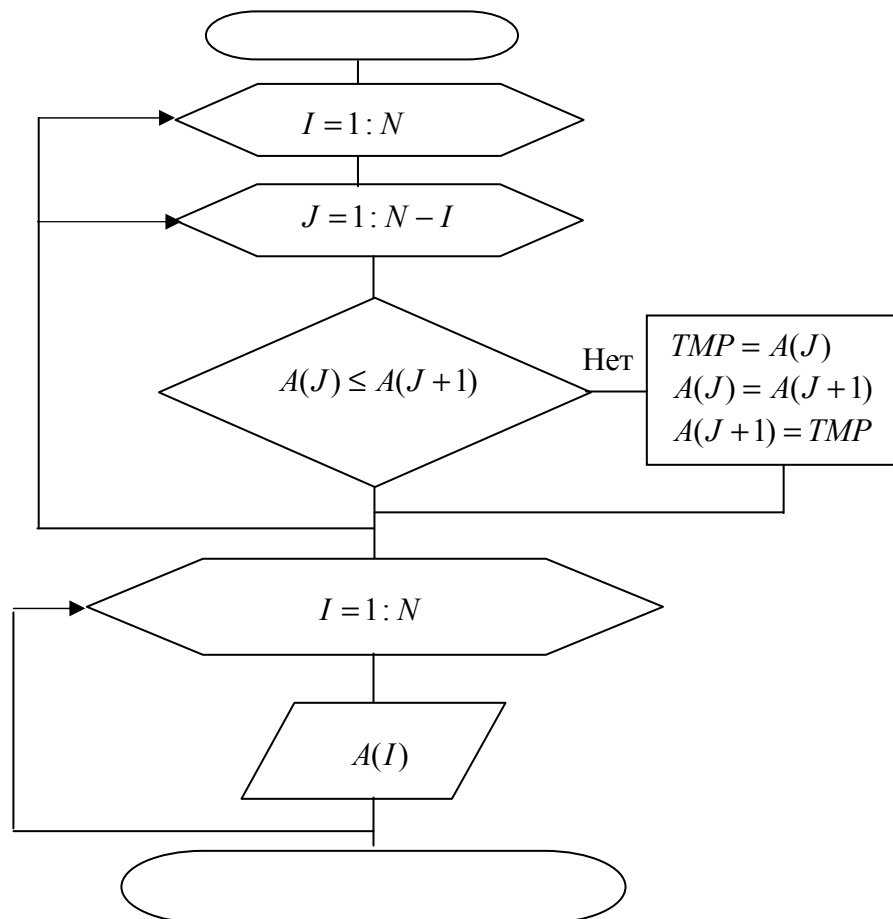


Рис. 6. Сортировка «пузырьком»

Следующий алгоритм сортировки получил название «*сортировка слиянием*». Идея алгоритма состоит в следующем. Разбиваем последовательность, подлежащую сортировке на две последовательности половинного размера. Для простоты будем считать, что N является степенью 2. Затем сортируем каждую из половин отдельно. После этого нам остается только соединить два упорядоченных массива половинного размера в один. Рекурсивное разбиение задачи на подзадачи меньшего размера происходит до тех пор пока размер последовательности не дойдет до единицы (любой массив длины 1 можно считать упорядоченным). Таким образом, начиная с одного элемента последовательности мы выполняем слияние упорядоченных подмассивов как показано на Рис. 7.

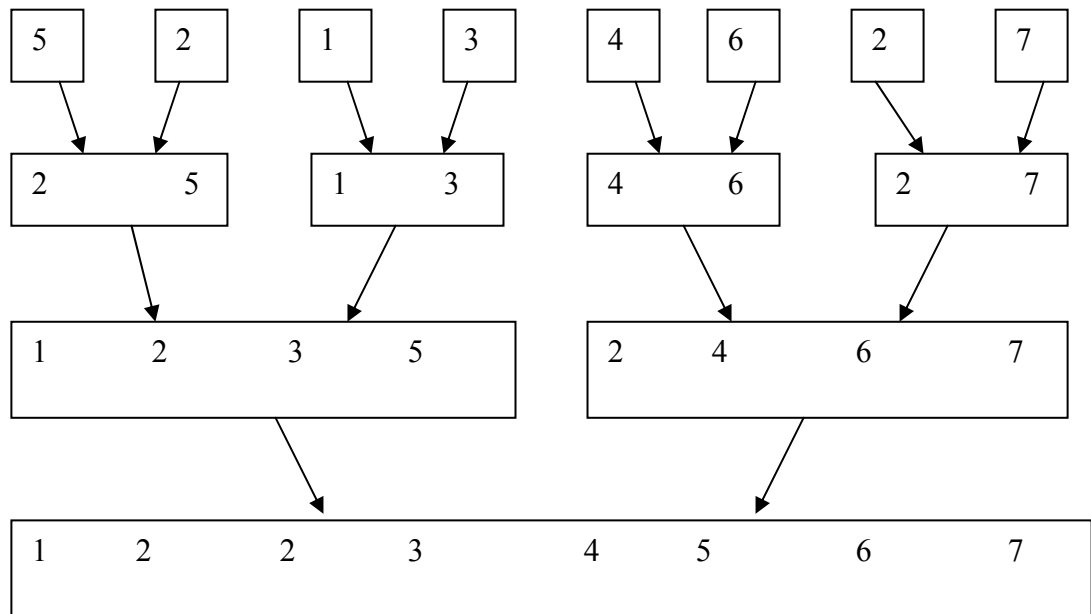


Рис. 7. Пример сортировки слиянием

Алгоритм сортировки слиянием показан на Рис. 8. Нетривиальным моментом в этом алгоритме является соединение двух упорядоченных подмассивов в один. Оно выполняется процедурой $MERGE(A, p, q, L)$. Параметрами этой процедуры являются массив A и числа p, q, L , задающие индексы и длину сливаемых участков. А именно, p – это первый индекс в первом из сливаемых подмассивов, q – первый индекс во втором из сливаемых подмассивов, L – длина сливаемых подмассивов. Блок-схема процедуры $MERGE()$ представлена на Рис. 9.

Оценим временную сложность алгоритма сортировки слиянием. Пусть алгоритм разбивает задачу размера N на a подзадач, каждая из которых имеет в b раз меньший размер. Пусть также разбиение требует времени $D(N)$, а слияние – $C(N)$. Тогда время работы можно вычислить по рекуррентной формуле

$$T(N) = aT\left(\frac{N}{b}\right) + D(N) + C(N).$$

Предположим, что размер массива есть степень двойки, а на каждом шаге алгоритма сортируемый участок делится пополам. Разбиение на части (вычисление границы) требует времени $\theta(1)$, а слияние времени $\theta(N)$. Тогда имеем

$$T(N) = \begin{cases} \theta(1), & N = 1 \\ 2T\left(\frac{N}{2}\right) + \theta(N), & N > 1 \end{cases}$$

Полагая $\theta(N) \approx kN$, где k – константа, получаем уравнение вида

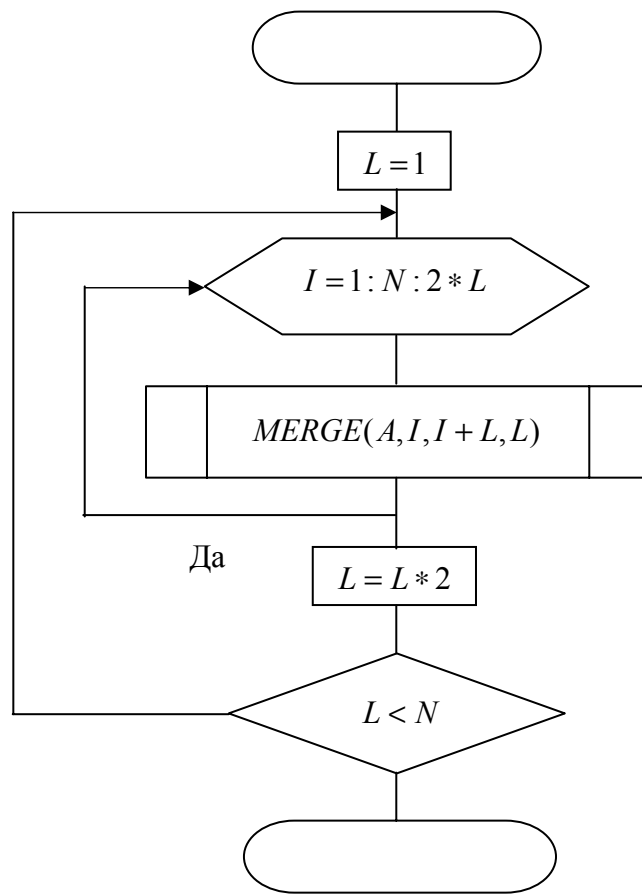


Рис. 8. Алгоритм сортировки слиянием

$T(N) = aT\left(\frac{N}{b}\right) + kN$, $T(1) = k$, которое имеет решение

$T(N) = kN \sum_{i=0}^{\log_b N} \left(\frac{a}{b}\right)^i$, т.е в нашем случае $T(N) = kN \sum_{i=0}^{\log_2 N} \left(\frac{2}{2}\right)^i = kN(\log_2 N + 1)$.

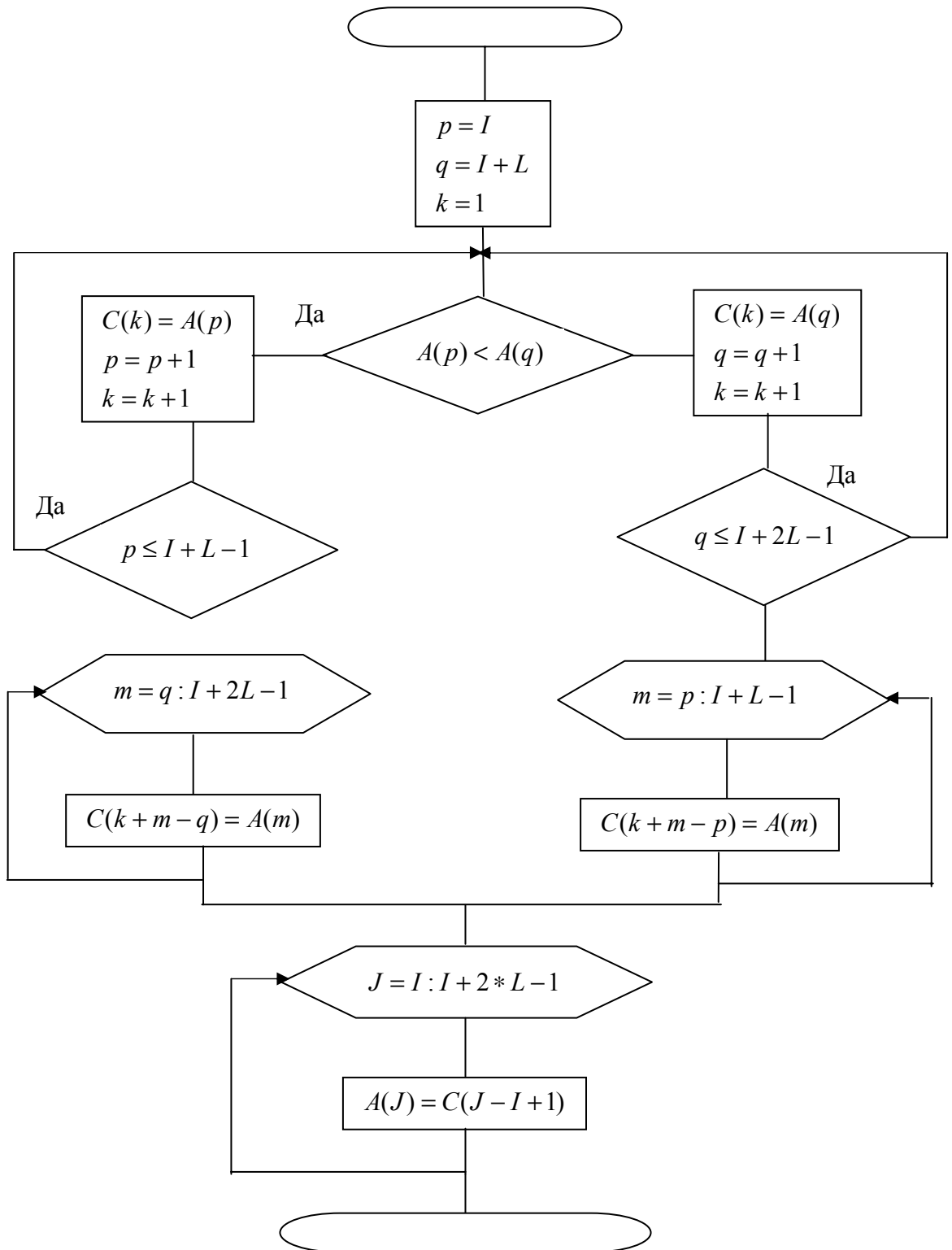


Рис.9. Блок-схема процедуры *MERGE()*