РЕШЕНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Обозначим через $F(n)$ значение некоторого выражения при подстановке в него целого числа n. Тогда зависимость члена последовательности $F(n)$ от членов последовательности $F(n-1)$, $F(n-2),...$ со значениями аргумента меньшими n, называется рекуррентным уравнением. Примером, может служить уравнение вида:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2). \tag{1}$$

Рекуррентное уравнение имеет порядок k, если оно позволяет выразить член последовательности $F(n+k)$ через члены $F(n), F(n+1),....,F(n+k-1)$. Таким образом, уравнение (1) имеет порядок 2, а уравнение

$$F(n+3) = 6F(n)F(n+2) + F(n+1)$$

имеет порядок 3.

Если задано рекуррентное уравнение k-го порядка, то ему удовлетворяет бесконечно много последовательностей. Но если первые k элементов заданы, то все остальные определяются однозначно. А именно, элемент $F(k+1)$ выражается через $F(1),...,F(k)$, элемент $F(k+2)$ через элементы $F(2),...,F(k+1)$ и т.д.

Алгоритм решения рекуррентного уравнения (1) приведен на Рис. 12 Отметим, что уравнение (1) описывает так называемую, последовательность чисел Фибоначчи: $F(1)=1$, $F(2)=1$, $F(3)=2$, $F(4)=3$, $F(5)=5$, $F(6)=8$, $F(7)=13$, $F(8)=21$, ... Фактически алгоритм решения сводится к тому, что на каждом шаге пользуясь начальными членами и заданным уравнением мы вычисляем очередной член последовательности. Действуя таким образом, мы рано или поздно получим любой член последовательности. Однако при этом нам придется вычислять и все предыдущие члены. Во многих случаях удобнее иметь явную формулу для n-го члена последовательности.

Будем говорить, что некоторая последовательность является *решением рекуррентного уравнения*, если при подстановке ее в уравнение, последнее обращается в тождество. Например, последовательность $2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$ является одним из решений рекуррентного уравнения

$$F(n+2) = 3F(n+1) - 2F(n).$$

Действительно, общий член этой последовательности имеет вид $F(n) = 2^n$. Значит, $F(n+2) = 2^{n+2}$, $F(n+1) = 2^{n+1}$. Но при любом n имеет место тождество

$$2^{n+2} = 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n.$$

Таким образом, 2^n является решением рекуррентного уравнения.

Решение рекуррентного уравнения называется *общим*, если оно зависит от k произвольных постоянных $C_1,...,C_k$, и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение данного уравнения. Например, для уравнения

$$F(n+2) = 5F(n+1) - 6F(n) \tag{2}$$

общим решением будет

$$F(n) = C_1 2^n + C_2 3^n. \tag{3}$$

Легко проверить, что последовательность (3) обращает (2) в тождество. Поэтому достаточно показать, что любое решение (2) можно представить в виде (3). Но любое решение (2) однозначно определяется значениями $F(1)$ и $F(2)$. Поэтому надо показать, что для любых чисел $F(1)$ и $F(2)$ найдутся такие C_1 и C_2, что

$$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 = F(1) \\ 2^2 C_1 + 3^2 C_2 = F(2) \end{cases}$$

Определитель системы равен $\Delta = (2 \cdot 3^2 - 2^2 3) = 6$. При любых $F(1)$ и $F(2)$ система имеет решение. Поэтому (3) действительно является решением (2).

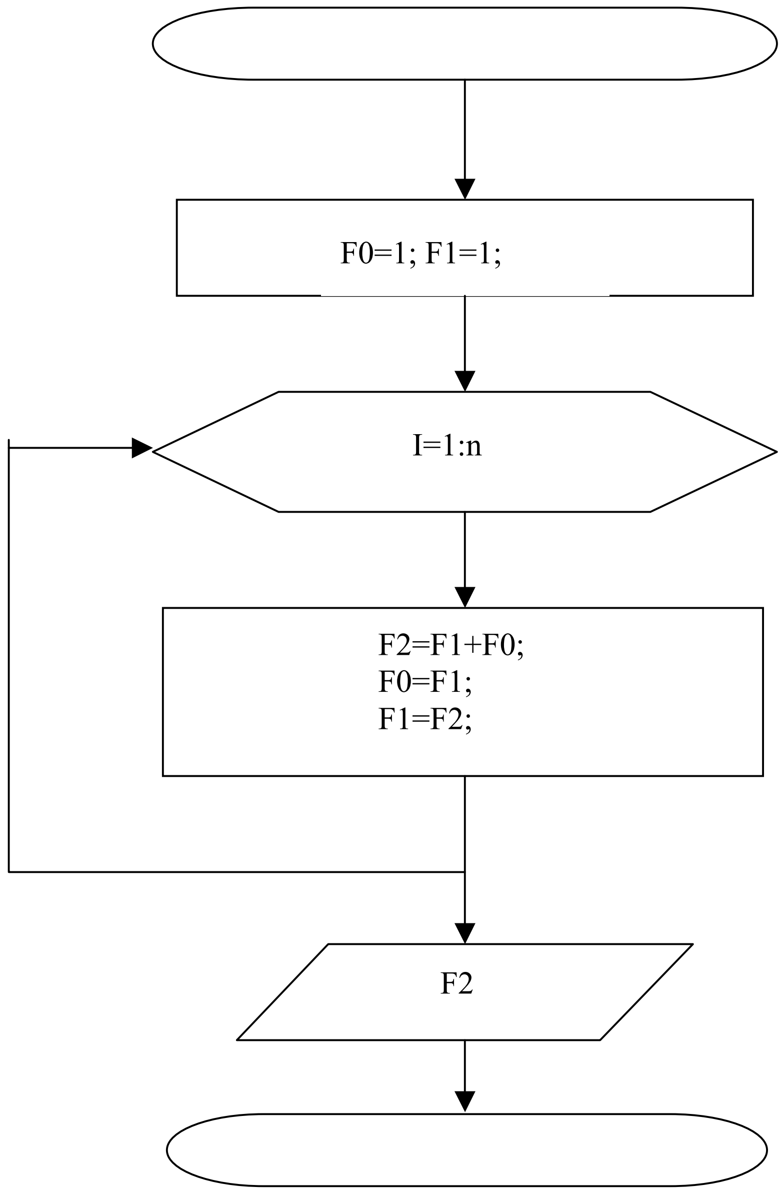

Рис.12. Алгоритм формирования последовательности чисел Фибоначчи

ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для решения произвольных рекуррентных уравнений общих правил не существует. Однако есть весьма часто встречающийся класс уравнений, решаемый единообразным методом. Это рекуррентные уравнения вида

$$F(n+k) = a_{k-1}F(n+k-1) + a_{k-2}F(n+k-2) + ... + a_1F(n+1) + a_0F(n) + f(n), \qquad (4)$$

где $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ – некоторые числа (постоянные коэффициенты), а $f(n)$ – некоторая функция от n. Такие уравнения называются *линейными* потому, что элементы последовательности $F(n), ..., F(n+k-2), F(n+k-1), F(n+k)$ связаны линейной зависимостью. Если при этом функция $f(n) = 0$, то уравнения такого вида называются *однородными* или *однородными уравнениями с постоянными коэффициентами.* В противном случае уравнения называются *неоднородными.*

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Линейные однородные рекуррентные уравнения с постоянными коэффициентами имеют вид

$$F(n+k) = a_{k-1}F(n+k-1) + a_{k-2}F(n+k-2) + ... + a_1F(n+1) + a_0F(n), \qquad (5)$$

где $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ - некоторые числа.

Очевидно, что последовательность 0,0,0,… всегда будет решением любого однородного уравнения. Такое решение называется *тривиальным решением.*

Сначала рассмотрим, как решаются такие уравнения при $k = 2$, то есть изучим уравнения вида

$$F(n+2) = a_1F(n+1) + a_0F(n). \qquad (6)$$

Решение этих уравнений основывается на следующих двух утверждениях:

1. Если $F_1(n)$ и $F_2(n)$ являются решениями рекуррентного уравнения (6), то при любых числах A и B последовательность $F(n) = AF_1(n) + BF_2(n)$ также является решением этого уравнения.

Действительно, по условию

$$\begin{cases} F_1(n+2) = a_1F_1(n+1) + a_0F_1(n) \\ F_2(n+2) = a_1F_2(n+1) + a_0F_2(n) \end{cases}.$$

Умножим эти равенства на A и B соответственно и сложим полученные тождества. В результате получим:

$$AF_1(n+2) + BF_2(n+2) = a_1\left[AF_1(n+1) + BF_2(n+1)\right] + a_0\left[AF_1(n) + BF_2(n)\right].$$

А это означает, что $F(n) = AF_1(n) + BF_2(n)$ является решением уравнения (6).

2. Если число r_1 является корнем уравнения

$$r^2 = a_1r + a_0,$$

то последовательность $r_1^0, r_1, r_1^2, ..., r_1^n, ...$ является решением рекуррентного уравнения

$$F(n+2) = a_1 F(n+1) + a_0 F(n).$$

Докажем это утверждение. Пусть $F(n) = r_1^n$, то $F(n+1) = r_1^{n+1}$ и $F(n+2) = r_1^{n+2}$. Подставляя эти значения в (6), получаем равенство

$$r_1^{n+2} = a_1 r_1^{n+1} + a_0 r_1^n$$

или

$$r_1^n (r_1^2 - a_1 r_1 - a_0) = 0.$$

Оно справедливо, так как по условию $r_1^2 = a_1 r_1 + a_0$. При $r_1 = 0$ имеем тривиальное решение.

Заметим, что наряду с последовательностью $\{r_1^n\}$ любая последовательность вида

$$F(n) = r_1^{m+n},$$

где $m = 1, 2, ...$, также является решением уравнения (6). Для доказательства этого факта достаточно использовать утверждение 1, положив в нем $A = r_1^m$, $B = 0$.

Из утверждений 1 и 2 вытекает следующее правило решения линейных однородных рекуррентных уравнений второго порядка.

Пусть дано рекуррентное уравнение (6)

$$F(n+2) = a_1 F(n+1) + a_0 F(n).$$

Составим квадратное уравнение

$$r^2 = a_1 r + a_0, \tag{7}$$

которое называется *характеристическим уравнением* данного рекуррентного уравнения. Если это уравнение имеет два различных корня r_1 и r_2, то *общее решение* уравнения (6) имеет вид

$$F(n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n.$$

Докажем это утверждение. Заметим сначала, что согласно утверждению 2 последовательности $F_1(n) = r_1^n$ и $F_2(n) = r_2^n$ являются решениями данного рекуррентного уравнения. А тогда по утверждению 1 и $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ является его решением. Надо только показать, что любое решение уравнения (6) можно записать в этом виде. Но любое решение уравнения второго порядка определяется значениями $F(0)$ и $F(1)$. Поэтому достаточно показать, что система уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = F(0) \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 = F(1) \end{cases}$$

имеет решение при любых $F(0)$ и $F(1)$. Очевидно, что этими решениями являются

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{F(1) - F(0) r_2}{r_1 - r_2} \\ C_2 = \dfrac{F(0) r_1 - F(1)}{r_1 - r_2}. \end{cases}$$

При $r_1 \neq r_2$ система всегда имеет решение.

Рассмотрим пример. Как уже было сказано, последовательность чисел Фибоначчи 0, 1,1, 2,3,5,8,13,… можно получить с помощью рекуррентного уравнения

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \tag{8}$$

Для него характеристическое уравнение имеет вид

$$r^2 = r + 1.$$

Корнями этого квадратного уравнения являются числа

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому общее решение уравнения Фибоначчи имеет вид

$$F(n) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{9}$$

Начальными условиями являются значения $F(0)=0$, $F(1)=1$. В соответствии с этими начальными условиями получаем для C_1 и C_2 систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}\left(C_1 - C_2\right) = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим, что $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ и поэтому

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \tag{10}$$

Таким образом, это выражение при всех натуральных значениях n принимает целые значения.

СЛУЧАЙ РАВНЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим случай, когда корни характеристического уравнения совпадают: $r_1 = r_2$. В этом случае выражение $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ уже не будет являться общим решением. Ведь из-за того, что $r_1 = r_2$, это решение можно записать в виде

$$F(n) = (C_1 + C_2) r_1^n = C r_1^n.$$

В результате остается только одна константа C, и выбрать ее так, чтобы уравнение удовлетворяло двум начальным условиям $F(0)$ и $F(1)$, вообще говоря, невозможно.

Следовательно, необходимо найти какое-нибудь другое решение, отличное от $F_1(n) = r_1^n$. Таким решением является $F_2(n) = n r_1^n$. В самом деле, если квадратное уравнение $r^2 = a_1 r + a_0$ имеет два совпадающих корня $r_1 = r_2$, то по теореме Виета $a_1 = 2r_1$, а $a_0 = -r_1^2$. Поэтому, уравнение записывается следующим образом:

$$r^2 = 2r_1 r - r_1^2.$$

А тогда рекуррентное уравнение имеет вид

$$F(n+2) = 2r_1 F(n+1) - r_1^2 F(n) \tag{11}$$

Проверим, что $F_2(n) = n r_1^n$ действительно является его решением. Подставляя значения $F_2(n+2) = (n+2) r_1^{n+2}$, $F_2(n+1) = (n+1) r_1^{n+1}$ в уравнение (11) получим очевидное тождество

$$(n+2) r_1^{n+2} = 2r_1 (n+1) r_1^{n+1} - r_1^2 n r_1^n.$$

Значит, $n r_1^n$ - это решение нашего рекуррентного уравнения.

Таким образом, нам известно уже два решения данного рекуррентного уравнения: $F_1(n) = r_1^n$ и $F_2(n) = n r_1^n$. Тогда общее решение можно записать следующим образом:

$$F(n) = C_1 r_1^n + C_2 n r_1^n = r_1^n (C_1 + C_2 n).$$

Теперь коэффициенты C_1 и C_2 можно подобрать так, чтобы выполнялись любые два начальные условия для $F(n)$

$$\begin{cases} C_1 = F(0) \\ C_1 r_1 + C_2 r_1 = F(1) \end{cases}, \qquad C_2 = \frac{F(1)}{r_1} - F(0).$$

Линейные рекуррентные уравнения, порядок которых больше двух, решаются таким же способом. Пусть уравнение имеет вид

$$F(n+k) = a_{k-1}F(n+k-1) + a_{k-2}F(n+k-2) + ... + a_0 F(n) = 0 \tag{12}$$

Составим характеристическое уравнение

$$r^k = a_{k-1}r^{k-1} + a_{k-2}r^{k-2} + ... + a_0 .$$

Если все корни $r_1,...,r_k$ этого алгебраического уравнения k-й степени различны, то общее решение уравнения (12) имеет вид

$$F(n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + ... + C_k r_k^n .$$

Если же, например, $r_1 = r_2 = ... = r_m$, то этому корню соответствуют решения $F_1(n) = r_1^n$, $F_2(n) = nr_1^n$, $F_3(n) = n^2 r_1^n$, …, $F_m(n) = n^{m-1} r_1^n$ рекуррентного уравнения (12). В общем решении этому корню соответствует часть

$$r_1^n \left(C_1 + C_2 n + ... + C_m n^{m-1} \right).$$

Составляя такие выражения для всех корней и складывая их, получаем общее решение уравнения (12)

$$F(n) = \sum_{i=1}^{s} P_i(n) r_i^n ,$$

где m_i – кратность корня r_i, s – число различных корней, $P_i(n)$ – полином степени $m_i - 1$ относительно n.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$F(n+2) = 2F(n+1) - F(n), \; F(0) = 2, \; F(1) = 4$$

Составим характеристическое уравнение

$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$

$$r_1 = r_2 = 1,$$

Общее решение рекуррентного уравнения имеет вид

$$F(n) = C_1(1)^n + C_2 n(1)^n = C_1 + C_2 n .$$

Составляем систему уравнений для нахождения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ C_1 + C_2 = 4 \end{cases}.$$

Решая систему, получаем, что $C_1 = 2$ и $C_2 = 2$. Таким образом, решение рекуррентного уравнения имеет вид

$$F(n) = 2 + 2n .$$

ПОИСК КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА

При отыскании корней характеристического уравнения довольно часто приходится решать уравнения степени больше 2. Для решения этой задачи можно использовать метод подбора, т.е. брать наугад число и проверять, является ли оно корнем данного многочлена. При этом можно довольно быстро “натолкнуться” на корень, а можно и никогда его не найти. Ведь проверить все числа невозможно, так как их бесконечно много. Другое дело, если бы нам удалось сузить область поиска, например, знать, что искомые корни находятся, например, среди тридцати указанных чисел. А для тридцати чисел можно сделать проверку. А в связи с этим важным представляется утверждение.

Теорема 1. *Если несократимая дробь l/m ($l, m -$ целые числа) является корнем многочлена $F(x)$ с целыми коэффициентами, то старший коэффициент этого многочлена делится на m, а свободный член – на l.*

В самом деле, если $F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, где $a_n, a_{n-1}, ..., a_0 -$ целые числа, и l/m является его корнем, то $F(l/m) = 0$, т.е.

$$a_n (l/m)^n + a_{n-1}(l/m)^{n-1} + ... + a_1(l/m) + a_0 = 0 .$$

Умножим обе части равенства на m^n, получим

$$a_n l^n + a_{n-1} l^{n-1} m + ... + a_1 l m^{n-1} + a_0 m^n = 0.$$

Отсюда следует, что $a_n l^n = m(-a_{n-1} l^{n-1} - ... - a_1 l m^{n-2} - a_0 m^{n-1})$.

Очевидно, что целое число $a_n l^n$ делится на m. Но l/m – несократимая дробь, т.е. числа l и m взаимно просты, а тогда, как известно из теории делимости целых чисел, числа l^n и m тоже взаимно просты. Итак, $a_n l^n$ делится на m и m взаимно просто с l^n, значит, a_n делится на m.

Аналогично доказывается, что a_0 делится на l. Доказанная теорема позволяет значительно сузить область поиска рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами. Продемонстрируем это на конкретном примере. Найдем рациональные корни многочлена

$$F(x) = 6x^4 + 13x^3 - 24x^2 - 8x + 8.$$

Согласно доказанной теореме, рациональные корни этого многочлена находятся среди несократимых дробей вида l/m, где l – делитель свободного члена $a_0 = 8$, а m – делитель старшего коэффициента $a_4 = 6$. При этом, если дробь отрицательная, то знак “–“ будем относить к ее числителю. Например, $-\frac{1}{3} = \frac{-1}{3}$. Значит, можно сказать, что l – делитель числа 8, а m – положительный делитель числа 6. Так как делители числа 8 – это $\pm 1,2,4,8$, а положительными делителями числа 6 будут 1, 2,3,6, то рациональные корни рассматриваемого многочлена находятся среди чисел $\pm$ 1, $1/2, 1/3, 1/6, 2, 2/3, 4, 4/3, 8, 8/3$. Напомним, что мы выписали только несократимые дроби.

Таким образом, мы имеем двадцать чисел-«кандидатов» в корни. Осталось только проверить каждое из них и отобрать те, которые действительно являются корнями. Но опять-таки придется сделать довольно много проверок. Следующая теорема упрощает эту работу.

Теорема 2. *Если несократимая дробь* l/m *является корнем многочлена* $F(x)$ *с целыми коэффициентами, то* $F(k)$ *делится на* $(l - mk)$ *для любого целого числа* k *при условии, что* $l = mk \neq 0$.

Для доказательства этой теоремы разделим $F(x)$ на $(x-k)$ с остатком. Получим $F(x) = (x-k)s(x) + F(k)$. Так как $F(x)$ − многочлен с целыми коэффициентами, то таким же является и $s(x)$, а $F(k)$ − целое число. Пусть $s(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$. Тогда $F(x) - F(k) = (x-k)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0)$. Положим в этом равенстве $x = l/m$. Учитывая, что $F(l/m) = 0$, получаем

$$-F(k) = (l/m - k)\left(b_{n-1}\frac{l^{n-1}}{m^{n-1}} + b_{n-2}\frac{l^{n-2}}{m^{n-2}} \ldots + b_1\frac{l}{m} + b_0 \right).$$

Умножим обе части последнего равенства на m^n:

$$-m^n F(k) = (l - km)\left(b_{n-1}l^{n-1} + b_{n-2}l^{n-2}m + \ldots + b_1 l m^{n-2} + b_0 m^{n-1}\right).$$

Отсюда следует, что целое число $m^n F(k)$ делится на $(l - km)$. Но так как l и m взаимно просты, то m^n и $(l - km)$ тоже взаимно просты, а значит $F(k)$ делится на $(l - km)$. Теорема доказана.

Вернемся теперь к нашему примеру и, воспользовавшись данной теоремой, еще больше сузим круг поиска рациональных корней. Применим теорему для значений $k = 1$ и $k = -1$, т.е. если несократимая дробь является корнем многочлена $F(x)$, то $F(1)$ делится на $(l - m)$, а $F(-1)$ делится на $(l + m)$. Очевидно, что в нашем случае $F(1) = -5$, а $F(-1) = -15$. Заметим, что заодно мы исключили из рассмотрения единицу.

Итак, рациональные корни нашего многочлена следует искать среди чисел $1/2,\ 1/3,\ 1/6,\ 2,\ 2/3,\ 4,\ 4/3,\ 8,\ 8/3$

Рассмотрим $l/m = 1/2$. Тогда $l - m = -1$ и $F(1) = -5$ делится на это число. Далее, $l + m = 3$ и $F(-1) = -15$ также делится на 3. Значит, дробь $1/2$ остается в числе кандидатов в корни. Пусть теперь $l/m = -1/2$. В этом случае $l - m = -3$ и $F(1) = -5$ не делится на –3. Значит, дробь $-1/2$ не может быть корнем данного многочлена. Выполнив проверку для каждой из выписанных выше дробей, получим, что искомые корни находятся среди чисел $1/2,\ -2/3,\ 2,\ -4$.

Таким образом, с помощью довольно простого приема удалось значительно сузить область поиска рациональных корней рассматриваемого многочлена. Проверив оставшиеся кандидаты, убедимся, что многочлен $F(x) = 6x^4 + 13x^3 - 24x^2 - 8x + 8$ имеет два рациональных корня $1/2$ и $-2/3$.

Описанный выше метод позволяет находить лишь рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Между тем, многочлен может иметь и иррациональные корни. Так, например, рассмотренный в примере многочлен имеет еще два корня: $-1 \pm \sqrt{5}$ (это корни многочлена $x^2 + 2x - 4$).

Заметим, что при испытании кандидатов в корни с помощью последней теоремы, обычно рассматривают случай $k = \pm 1$. Другими словами, если l/m – кандидат в корни, то проверяют, делятся ли $F(1)$ и $F(-1)$ на $l - m$ и $l + m$ соответственно. Но может случиться так, что, например, $F(1) = 0$, т.е. единица – корень, а тогда $F(1)$ делится на любое число и наша проверка теряет смысл. В этом случае следует разделить $F(x)$ на $x - 1$, т.е. получить $F(x) = (x-1)s(x)$, и производить испытания для многочлена $s(x)$. При этом не следует забывать, что один корень $F(x)$ (корень $x_1 = 1$) уже найден.

В некоторых случаях, когда характеристическое уравнение относится к уравнениям специального вида, его корни могут быть найдены с помощью подстановки. К таким уравнениям относятся, например, *симметрические и возвратные* уравнения. Симметрическим называется уравнение степени n (n – четное) вида

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + cx^2 + bx + a = 0\,. \tag{13}$$

Симметрические уравнения являются частным случаем возвратных. К возвратным относятся уравнения вида

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + ck^{n/2-2}x^2 + bk^{n/2-1}x + ak^{n/2} = 0,.$$

где k – некоторый коэффициент. Рассмотрим, например, решение симметрических и возвратных уравнений четвертой степени. Пусть дано симметрическое уравнение

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Сначала понизим его степень, разделив обе части на x^2. Получим уравнение

$$ax^2 + bx + c + b/x + a/x^2 = 0. \tag{14}$$

Произведем следующую подстановку:

$$t = x + 1/x. \tag{15}$$

Тогда, учитывая, что $t^2 = x^2 + 1/x^2 + 2$, выражение (14) можно записать как

$$at^2 + bt + (c - 2a) = 0\,. \tag{16}$$

Решив уравнение (16) как обычное квадратное уравнение, получим два корня t_1 и t_2. Теперь подставляя поочередно корни t_1 и t_2 в уравнение (15), получим два квадратных уравнения

$$\begin{cases} x^2 - t_1 x + 1 = 0 \\ x^2 - t_2 x + 1 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Решение уравнений (17) дает нам все четыре корня исходного уравнения (13). Таким образом, решение симметрического уравнения четвертой степени сводится к решению трех квадратных уравнений.

Аналогично решаются и возвратные уравнения. Если уравнение четвертой степени можно представить в виде

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bkx + ak^2 = 0, \tag{18}$$

то его решение может быть получено с помощью подстановки

$$t = x + k/x. \tag{19}$$

Также как и в предыдущем случае понизим степень уравнения, поделив обе части на x^2. Для получившегося уравнения

$$ax^2 + bx + c + bk/x + ak^2/x^2 = 0\,, \tag{20}$$

воспользуемся подстановкой (19). Тогда уравнение (20) можно переписать в виде

$$at^2 + bt + (c - 2ak) = 0\,. \tag{21}$$

Так же, как и в предыдущем примере, решим уравнение (21) и получим два корня t_1 и t_2. Теперь, подставляя поочередно корни t_1 и t_2 в уравнение (19), получим два квадратных уравнения

$$\begin{cases} x^2 - t_1 x + k = 0 \\ x^2 - t_2 x + k = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Решив систему уравнений (22) получим четыре корня исходного уравнения (18). Таким образом, решение возвратного уравнения четвертой степени также сводится к решению трех квадратных уравнений.

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Линейное рекуррентное уравнение называется *неоднородным,* если его можно представить в следующем виде:

$$a_k F(n+k) + a_{k-1} F(n+k-1) + ... + a_1 F(n+1) + a_0 F(n) = f(n), \tag{23}$$

где $f(n)$ – некоторая функция от n, $a_k = 1$.

Введем однородное линейное рекуррентное уравнение (ОЛРУ), соответствующее неоднородному линейному рекуррентному уравнению (НЛРУ) (23)

$$a_k F(n+k) + a_{k-1} F(n+k-1) + ... + a_1 F(n+1) + a_0 F(n) = 0, \tag{24}$$

а его общее решение обозначим через $F_O(n)$. По аналогии с методами решения дифференциальных уравнений вначале пренебрежем начальными условиями и предположим, что одно решение уравнения (23) уже найдено. Назовем это решение *частным* и обозначим его через $F_p(n)$. Будем искать общее решение НЛРУ в виде суммы его частного решения и общего решения соответствующего ему ОЛРУ

$$F(n) = F_O(n) + F_p(n). \tag{25}$$

Покажем, что (25) действительно является решением НЛРУ (23). Подставим (25) в (23)

$$\begin{gathered} a_k(F_O(n+k) + F_p(n+k)) + a_{k-1}(F_O(n+k-1) + F_p(n+k-1)) + ... \\ ... + a_1(F_O(n+1) + F_p(n+1)) + a_0(F_O(n) + F_p(n)) = f(n), \end{gathered}$$

но это уравнение является тождеством, так как

$$\begin{cases} a_k F_O(n+k) + a_{k-1} F_O(n+k-1) + ... + a_1 F_O(n+1) + a_0 F(n) = 0 \\ a_k F_p(n+k) + a_{k-1} F_p(n+k-1) + ... + a_1 F_p(n+1) + a_0 F_p(n) = f(n), \end{cases}$$

где первое уравнение в системе есть общее решение ОЛРУ, а второе – частное решение НЛРУ.

РЕШЕНИЕ НЛРУ ПРИ ФУНКЦИИ-КОНСТАНТЕ

Пусть НЛРУ имеет вид

$$a_k F(n+k) + a_{k-1} F(n+k-1) + ... + a_1 F(n+1) + a_0 F(n) = b, \tag{26}$$

где b – целое число (константа).

Будем искать частное решение уравнения (26) в виде константы

$$F_p(n) = c, \tag{27}$$

то есть, c – также целое число. Подставим (27) в (26)

$$a_k c + a_{k-1} c + ... + a_1 c + a_0 c = b,$$

$$c = \frac{b}{\sum_{i=0}^{k} a_i}. \tag{28}$$

Константа будет частным решением уравнения (26) при условии неравенства нулю знаменателя формулы (28).

Введем характеристический полином для НЛРУ (26)

$$h(r) = a_k r^k + a_{k-1} r^{k-1} + ... + a_1 r + a_0 .$$

Если $h(1) \neq 0$, то, очевидно, что уравнение (26) имеет частное решение

$$F_p(n) = \frac{b}{h(1)}.$$

Обозначим формальную производную характеристического полинома $h(r)$ через $h'(r)$. Тогда

$$h'(r) = a_k k r^{k-1} + a_{k-1}(k-1)r^{k-2} + ... + a_1, \qquad (29)$$

$$h'(1) = \sum_{i=0}^{k} a_i i. \qquad (30)$$

Пусть $h(1) = 0$, но $h'(1) \neq 0$. Будем искать решение (26) в виде

$$F_p(n) = cn. \qquad (31)$$

Подставляя (31) в (26), имеем

$$a_k c(n+k) + a_{k-1}c(n+k-1) + ... + a_1 c(n+1) + a_0 cn = b,$$

$$c\left(\sum_{i=0}^{k} a_i (n+i)\right) = b,$$

$$c(h(1)n + h'(1)) = b,$$

но $h(1) = 0$, а $h'(1) \neq 0$ и

$$c = \frac{b}{h'(1)}.$$

Итак, если $h'(1) \neq 0$, то уравнение (26) имеет частное решение

$$F_p(n) = \frac{bn}{h'(1)}.$$

Обозначим m-ю производную $h(r)$ через $h^{(m)}(r)$. По определению будем считать $h^{(0)}(r) = h(r)$. Из курса алгебры известно, что если число α является m-кратным корнем многочлена $h(r)$, то $h^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Теперь частное решение (26) можно записать в виде

$$F_p(n) = \frac{bn^m}{h^{(m)}(1)}, \qquad (32)$$

где m – кратность корня $r = 1$ характеристического многочлена $h(r)$.

Пример. Решить уравнение

$$F(n+2-2F(n+1)+F(n) = 5 \text{ при } F(0) = 0,\ F(1) = 3.5.$$

1. Составляем ОЛРУ
$$F(n+2-2F(n+1)+F(n) = 0.$$
2. Составляем характеристическое уравнение
$$h(r) = r^2 - 2r + 1 = 0.$$
3. Решаем характеристическое уравнение
$$r_1 = r_2 = 1.$$
4. Записываем общее решение ОЛРУ
$$F_0(n) = C_1 1^n + C_2 n 1^n = C_1 + C_2 n.$$
5. Находим частное решение НЛРУ
$$F_p(n) = \frac{5n^2}{h^{(2)}(1)} = 2.5n^2,$$
так как $h^{(2)}(r) = (2r-2)' = 2.$
6. Записываем общее решение НЛРУ
$$F(n) = F_0(n) + F_p(n) = C_1 + C_2 n + 2.5n^2.$$
7. С учетом начальных условий находим коэффициенты в решении НЛРУ

$$\begin{cases} F(0) = C_1 + 0 \cdot C_2 + 2.5 \cdot 0 = 0 \\ F(1) = C_1 + 1 \cdot C_2 + 2.5 \cdot 1^2 = 3.5 \end{cases},$$

получаем $C_1 = 0,\ C_2 = 1$.

8. Записываем решение НЛРУ

$$F(n) = n + 2.5n^2.$$

Итак, мы получили явную формулу для вычисления n-го члена последовательности. В заключение вычислим саму последовательность: 0, 3, 5, 12, 25, 5, …

РЕШЕНИЕ НЛРУ ПРИ ФУНКЦИИ-МНОГОЧЛЕНЕ

Будем искать частное решение НЛРУ

$$a_k F(n+k) + a_{k-1} F(n+k-1) + ... + a_1 F(n+1) + a_0 F(n) = \sum_{i=0}^{l} b_i n^i, \tag{33}$$

в виде многочлена той же степени l, что и в правой части (33)

$$F_p(n) = \sum_{i=0}^{l} c_i n^i. \tag{34}$$

Подставляя (34) в (33), получим правило вычисления коэффициентов многочлена (34)

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{j=0}^{l} c_j (n+i)^j = \sum_{i=0}^{l} b_i n^i. \tag{35}$$

Приравнивая коэффициенты в левой и правой части при членах, содержащих n^l, получаем

$$\sum_{i=0}^{k} a_i c_l n^l = b_l n^l,$$

$$c_l = \frac{b_l}{h(1)},\ \text{при}\ h(1) \neq 0.$$

Остальные коэффициенты c_i находятся аналогично путем приравнивания коэффициентов при n^i, $i = 0,...,l-1$ в (35).

Если 1 является корнем характеристического уравнения $h(r)$ кратности m, то частное решение НЛРУ следует искать в виде

$$F_p(n) = \sum_{i=0}^{l} c_i n^{i+m}. \tag{36}$$

РЕШЕНИЕ НЛРУ ПРИ ФУНКЦИИ-ЭКСПОНЕНТЕ

Будем искать частное решение НЛРУ

$$a_k F(n+k) + a_{k-1} F(n+k-1) + ... + a_1 F(n+1) + a_0 F(n) = b\alpha^n \tag{37}$$

в виде

$$F_p(n) = c\alpha^n. \tag{38}$$

Подставляя (38) в (37) имеем

$$\sum_{i=0}^{k} a_i c \alpha^{n+i} = b\alpha^n.$$

То есть,

$$F_p(n)=\frac{b\alpha^n}{h(\alpha)},$$

если α не является корнем характеристического уравнения $h(r)$. Если же α является корнем характеристического уравнения кратности m, то частное решение (37) следует искать в виде

$$F_p(n)=d\alpha^n n^m,$$

где d – некоторая константа.

Пример. При решении одной задачи теории кодирования установлена рекуррентная зависимость числа умножений M от числа итераций n при построении проверочной матрицы кода

$$M(n+1)-2M(n)=4\cdot 2^n-3,\text{ при } M(2)=7.$$

Запишем ОЛРУ

$$M(n+1)-2M(n)=0.$$

Тогда имеем характеристическое уравнение

$$h(r)=r-2=0$$

и общее решение ОЛРУ

$$M_0(n)=C2^n.$$

Будем искать частное решение в виде

$$M_p(n)=d2^n+e.$$

Подставляя его в исходное уравнение, имеем

$$-e=4\cdot 2^n-3.$$

Левая часть уравнения не содержит d и, следовательно, предлагаемое частное решение определено неверно (так как 2 – корень характеристического уравнения). Теперь изменим вид частного решения на

$$M_p(n)=dn\cdot 2^n+e.$$

Подставляя его в исходное уравнение, имеем $e=3, d=2$. Таким образом,

$$M(n)=C2^n+2n\cdot 2^n+3$$

и, учитывая начальные условия, $C=-3.$ Итак, решение исходного уравнения

$$M(n)=2^n(2n-3)+3.$$

РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА

Рекуррентные уравнения, отличные от линейных рекуррентных уравнений с постоянными коэффициентами, не имеют общего метода решения. Они могут решаться, например, методом проб и ошибок.

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$F(n)=aF\left(\frac{n}{m}\right)+bn,\text{ при } F(1)=b. \tag{39}$$

Вычислим значение $F(n)$ при подстановке в (39) некоторых констант

$$F(m)=aF(1)+bm=b(m+a)=bm\left(1+\frac{a}{m}\right),\text{ при } n=m;$$

$$F(m^2)=aF(m)+bm^2=b(m^2+am+a^2)=bm^2\left(1+\frac{a}{m}+\left(\frac{a}{m}\right)^2\right),\text{ при } n=m^2;$$

$$F(m^3) = aF(m^2) + bm^3 = b(m^3 + am^2 + a^2m + a^3) = bm^3\left(1 + \frac{a}{m} + \left(\frac{a}{m}\right)^2 + \left(\frac{a}{m}\right)^3\right), \text{ при } n = m^3.$$

Теперь можно предположить, что решением уравнения (39) является

$$F(n) = bn\sum_{i=0}^{\log_m n} r^i, \tag{40}$$

где $r = \dfrac{a}{m}$.

Подставляя (40) в (39), имеем

$$F(n) = aF\left(\frac{n}{m}\right) + bn = a\left(b\left(\frac{n}{m}\right)\sum_{i=0}^{\log_m n} r^i\right) + bn = rbn\sum_{i=0}^{\log_m n-1} r^i + bn = bn\left(\sum_{i=0}^{\log_m n-1} r^{i+1} + 1\right) =$$

$$= bn\left(\sum_{j=1}^{\log_m n} r^j + r^0\right) = bn\sum_{i=0}^{\log_m n} r^i.$$

Таким образом, (40) действительно является решением уравнения (39).