Контрольный опрос по теме № 1

1. Доказать формулу полной вероятности

$$P(A)=\sum_{m=1}^{M}P(A\,|\,H_m)P(H_m)$$

2. Доказать формулу апостериорной вероятности (формулу Байеса)

$$P(H_j\,|\,A)=\frac{P(A\,|\,H_j)P(H_j)}{\sum_{m=1}^{M}P(A\,|\,H_m)P(H_m)}\,.$$

3. Доказать, что для любых случайных величин x и y

$$\mathbf{M}[x+y]=\mathbf{M}[x]+\mathbf{M}[y].$$

4. Доказать, что если c - константа, x - случайная величина, то

$$\mathbf{M}[cx]=c\mathbf{M}[x].$$

5. Доказать, что если x и y - независимые случайные величины, то

$$\mathbf{M}[xy]=\mathbf{M}[x]\mathbf{M}[y].$$

6. Доказать, что для некоррелированных случайных величин x и y

$$\mathbf{D}[x+y]=\mathbf{D}[x]+\mathbf{D}[y].$$

7. Доказать, что если c - константа, x - случайная величина, то

$$\mathbf{D}[cx]=c^2\mathbf{D}[x].$$

8. Доказать, что если c - константа, x - случайная величина, то

$$\mathbf{D}[c+x]=\mathbf{D}[x].$$

9. Доказать, что если x и y независимы то $K(x,y)=0$, то есть из независимости случайных величин следует их некоррелированность

10. Доказать, что если $x_1, x_2 \in X$, $p(x_1)\ge p(x_2)$, то $I(x_1)\le I(x_2)$

11. Доказать, что для независимых сообщений $x_1,\dots,x_n$ имеет место равенство

$$I(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}I(x_i).$$

12. Доказать, что $H(X)\ge 0.$

13. Доказать, что $H(X) \le \log|X|$.

14. Доказать, что $H(X) = \log|X|$ в том и только в том случае, когда элементы ансамбля X равновероятны.

15. Если для двух ансамблей X и Y распределения вероятностей представляют собой одинаковые наборы чисел (отличаются только порядком следования элементов), то

$$H(X) = H(Y).$$

16. Если ансамбли X и Y независимы, то

$$H(XY) = H(X) + H(Y).$$

17. Энтропия – выпуклая $\cap$ функция распределения вероятностей на элементах ансамбля X.

18. Доказать, что $H(X | Y) \ge 0$.

19. Доказать, что $H(X | Y) \le H(X)$, причем равенство имеет место в том и только в том случае, когда ансамбли X и Y независимы.

20. Доказать, что $H(XY) = H(X) + H(Y | X) = H(Y) + H(X | Y)$.

21. Доказать, что

$$H(X_1 ... X_n) = H(X_1) + H(X_2 | X_1) + H(X_3 | X_1 X_2) + ... + H(X_n | X_1, ..., X_{n-1}).$$

22. Доказать, что

$$H(X | YZ) \le H(X | Y)$$

23. Доказать, что сумма выпуклых функций выпукла.

24. Доказать, что произведение выпуклой функции и положительной константы – выпуклая функция.

25. Доказать, что линейная комбинация выпуклых функций с неотрицательными коэффициентами – выпуклая функция.

26. Доказать, что $h(p)=0$ при $p=0$.

27. Доказать, что $H\left(\frac{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2}{2}\right)\geq \frac{H(\mathbf{p}_1)+H(\mathbf{p}_2)}{2}$.

28. Доказать, что $H(X \mid X^n)$ не возрастает с увеличением n.

29. Доказать, что $H_n(X)$ не возрастает с увеличением n.

30. Доказать, что . $H_n(X)\geq H(X / X^{n-1})$.

31. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} H_n(X)=\lim_{n\to\infty} H(X \mid X^n)$.

32. Доказать, что для дискретного постоянного источника $H(X \mid X^\infty)=H(X)$.

33. Для однородной стационарной цепи Маркова связности s доказать, что

$$H_\infty(X)=H(X \mid X^s).$$

34. Доказать, что для неотрицательной случайной величины $P(x\geq A)\leq \frac{m_x}{A}$

35. Доказать неравенство Чебышева $P\left(\left|x-m_x\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}$.

36. Доказать неравенство Чебышева для суммы независимых случайных величин

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-m_x\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\sigma_x^2}{n\varepsilon^2}$$

37. Для высоковероятного множества $T_n(\delta)$ доказать, что $\lim_{n\to\infty} P\left(T_n(\delta)\right)=1$.

38. Для высоковероятного множества $T_n(\delta)$ доказать, что $\left|T_n(\delta)\right|\leq 2^{n(H(X)+\delta)}$.

39. Для высоковероятного множества $T_n(\delta)$ доказать, что $2^{-n(H(X)+\delta)}\leq p(\mathbf{x})\leq 2^{-n(H(X)-\delta)}$ для любого $\mathbf{x}\in T_n(\delta)$.